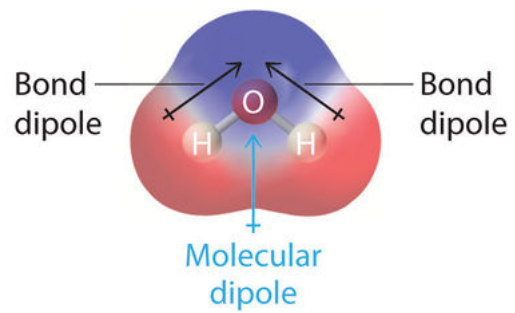
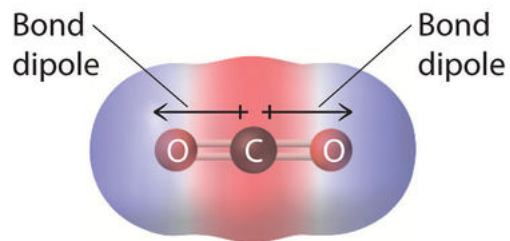


USC

GRADO EN FÍSICA

Apuntes de ELECTROMAGNETISMO I

Alberte Xosé López Freire
albertexose.lopez@rai.usc.es



8 de diciembre de 2020

ADVERTENCIA

Estos apuntes han sido elaborados a partir de diversas fuentes, en muchos casos la información ha sido extraída de manera casi literal. No es una creación propia, sino una recopilación de información relevante de la asignatura. Pueden aparecer cambios bruscos de notación, aunque he intentado que haya los mínimos posibles.

Pueden haber errores, erratas o imprecisiones.

NOTACIÓN

El primer símbolo es que el normalmente se empleará.

Potencial escalar	ϕ, V
Densidad de carga volumétrica	ρ_v
Densidad de carga superficial	ρ_s, σ_s, σ
Densidad de carga lineal	ρ_l, λ
Densidad de carga volumétrica ligada	ρ_{pv}, ρ_{vp}
Densidad de carga superficial ligada	$\rho_{ps}, \rho_{sp}, \sigma_{ps}$

Índice general

1. Electrostática en el vacío	5
1.1. La Ley de Coulomb	5
1.2. Distribuciones de carga. Campo electrostático.	5
1.3. La Ley de Gauss	7
1.4. Potencial escalar	7
1.5. Las ecuaciones de Poisson y Laplace	9
1.6. El dipolo eléctrico	9
1.6.1. Campo y potencial creados por un dipolo	9
1.6.2. Acción de un campo electrostático sobre un dipolo eléctrico	12
1.6.3. Interacción dipolo-dipolo	14
1.7. El Teorema de Earnshaw	14
1.8. Resultados de ejercicios	15
2. Electrostática en medio materiales	17
2.1. Conductores en un campo electrostático	17
2.1.1. Conductores a carga constante y a potencial constante	19
2.1.2. El problema de las puntas	21
2.1.3. Cavidades en conductores	21
2.2. Dieléctricos en campo electrostático	22
2.2.1. Polarización del dieléctrico	25
2.2.2. Susceptibilidad eléctrica	26
2.2.3. Clasificación de los dieléctricos	26
2.2.4. Condiciones en los límites	27
2.2.5. Irrotacionalidad del desplazamiento eléctrico	31
2.2.6. Capacitancia y condensadores	31
3. Energía y fuerzas electrostáticas	33
3.1. Sistemas de cargas puntuales	33
3.2. Distribuciones continuas de cargas	34
3.3. Energía electrostática en función del campo	34
3.4. Energía de una carga puntual	35
3.5. Energía electrostática almacenada en un condensador	36
3.6. Energía almacenada en la polarización	36
3.6.1. Q constante	37

3.6.2. V constante	38
3.6.3. Consideraciones sobre la energía	38
3.7. Energía de polarización desde el punto de vista del campo	39
3.8. Fuerza entre las placas de un condensador	40
3.8.1. Q constante	40
3.8.2. V constante	40
3.9. Comportamiento de los dieléctricos	41
3.10. Presión electrostática	42
4. Métodos especiales en electrostática	45
4.1. Unicidad de la solución de Laplace	45
4.2. Método de las imágenes	46
4.2.1. Ejemplos de aplicación del método de las imágenes	47
4.3. Solución de la ecuación de Laplace	56
4.3.1. Coordenadas rectangulares	56
4.4. Coordenadas esféricas	57
4.4.1. Ejemplos	58
5. Corrientes eléctricas estacionarias	63
5.1. Corrientes y densidades volumétricas de corriente	63
5.2. Ecuación de continuidad	65
5.3. Corrientes de conducción	67
5.4. Relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico. Ley de Ohm	68
5.5. Relación entre la resistencia y la capacidad	68
5.6. Relaciones energéticas: Ecuación del circuito	70
5.7. Equilibrio electrostático	71
5.8. Leyes de Kirchhoff	76

Capítulo 1

Electrostática en el vacío

1.1. La Ley de Coulomb

La Ley de Coulomb es una ley experimental que establece que entre dos cargas separadas aparece una fuerza que es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. En su forma vectorial se puede expresar como

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (1.1)$$

donde \mathbf{F}_1 es la fuerza que actúa sobre la carga 1 a causa de la carga 2, \mathbf{r}_1 es el vector posición de la primera carga y \mathbf{r}_2 el vector posición de la segunda carga.

1.2. Distribuciones de carga. Campo electrostático.

Se sabe desde los trabajos de Coulomb en 1785 que las cargas eléctricas son magnitudes escalares medibles, existiendo dos *tipos de cargas* que se han convenido en medir con números positivos las unas y con números negativos las otras. En el ámbito de la microfísica la carga es una característica de cualquier partícula que participa en la interacción electromagnética. En general es conveniente destacar el carácter discreto de la carga eléctrica, que será siempre un múltiplo entero de la carga eléctrica del electrón $e^- = -1,602 \cdot 10^{-19} C$.

En los sistemas de cargas puntuales las cargas se suponen concentradas en los puntos donde estén situadas. Por otro lado, las **distribuciones continuas de carga** son aglomerados de carga que, desde un punto de vista macroscópico, pueden caracterizarse por **densidades de carga**. Se definen las densidades mediante la relación entre la carga contenida en un volumen, superficie o longitud elemental y dicho volumen, superficie o longitud.

$$\rho_v \equiv \frac{dq}{dv} \quad (1.2)$$

$$\rho_s \equiv \frac{dq}{ds} \quad (1.3)$$

$$\rho_l \equiv \frac{dq}{dl} \quad (1.4)$$

De estas mismas ecuaciones podremos obtener la carga total en un determinado volumen, superficie o línea. Nótese que la densidad de carga puede variar con la localización del punto de fuente.

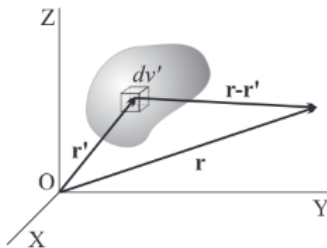


Figura 1.1: Elemento diferencial de carga en una distribución de carga continua.

Se define la **intensidad de campo eléctrico \mathbf{E}** como el límite al que tiende la fuerza de una distribución de carga sobre una carga de prueba Δq , cuando Δq tiende a cero, con Δq positiva.

$$\mathbf{E} \equiv \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{\Delta q} \quad (1.5)$$

Este límite es físicamente imposible de realizar, pero el significado de la idealización matemática es que el campo \mathbf{E} corresponde a la distribución de cargas que ejerce la fuerza sobre la carga de prueba, sin que dicha carga de prueba perturbe la distribución que genera el campo \mathbf{E} . Así, la fuerza sobre una carga estacionaria q en un campo \mathbf{E} vendrá dada por:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (1.6)$$

El campo electrostático creado en un punto P por una distribución continua de carga V' de densidad $\rho'_v(\mathbf{r}')$ tiene como expresión

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho'_v(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' \quad (1.7)$$

que será útil igualmente en los casos de distribuciones superficiales o lineales con unos pocos cambios. Con esta integral estaremos capacitados para obtener la intensidad del campo eléctrico en cualquier punto P, con tal de saber resolver la integral de (1.7). En general se seguirán los siguientes pasos:

1. Determinar que tipo de densidad de carga se presenta: volumétrica, superficial o lineal, constante o dependiente de la posición.
2. Seleccionar un sistema de coordenadas adecuado, teniendo presente las características de los vectores unitarios en cada caso. Escribir las expresiones de los vectores \mathbf{r}, \mathbf{r}' .
3. Introducir todos los elementos en la ec. (1.7). Establecer los límites de integración adecuados.
4. Resolver la integral.

En el caso de tratarse de un sistema de N cargas puntuales, el campo podría calcularse a través de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k) \quad (1.8)$$

Los dos postulados básicos de la electrostática en el espacio libre son los siguientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1.10)$$

De las cuales puede deducirse cualquier relación de la electrostática en el espacio libre, como la Ley de Coulomb o la Ley de Gauss.

1.3. La Ley de Gauss

Partimos de la ec. (1.9):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

e integramos a ambos lados

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

aplicamos el Teorema de la Divergencia (o Teorema de Gauss):

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

donde S es una superficie cerrada y \mathbf{F} un campo vectorial, obteniendo:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

finalmente

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Con lo que podemos enunciar la conocida como **Ley de Gauss para el campo eléctrico**:

El flujo eléctrico a través de una superficie gaussiana es igual a la carga neta interior a dicha superficie.

$$\Phi_E \equiv \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (1.11)$$

De esta Ley podemos deducir la Ley de Coulomb sin más que considerar una carga puntual y una superficie esférica centrada en ella. Aplicando la Ley de Gauss obtendremos la expresión (1.7) para una única carga, y mediante la definición de campo eléctrico la fuerza que sufriría una partícula cargada a una distancia R de esta.

1.4. Potencial escalar

Teorema 1.4.1. (Teorema de Helmholtz): Sea $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ y que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = b(\mathbf{r})$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{c}(\mathbf{r})$$

son funciones conocidas para todos los puntos de un volumen finito V' . Entonces si definimos las siguientes funciones:

$$\phi(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{b(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{c}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Entonces \mathbf{F} podrá expresarse como

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.12)$$

Vemos que, de hecho, el campo electrostático verifica las hipótesis del Teorema de Helmholtz (veáanse las ec. (1.9) (1.10)) con lo que podemos definir las funciones

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &\equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &\equiv \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\phi} \quad (1.13)$$

donde ϕ se denomina **potencial escalar** y vendrá dado por:

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'} \quad (1.14)$$

De tratarse de un sistema de N cargas puntuales q_1, \dots, q_N el potencial escalar en el punto P vendría dado por

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k|} \quad (1.15)$$

Otra manera de obtener la expresión de potencial escalar es tener en cuenta la siguiente propiedad del gradiente:

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (1.16)$$

Entonces, si tomamos la ec.(1.8) considerando $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_k$ tendremos que

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N q_k \nabla \left(\frac{1}{R_k} \right) = \nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{R_k} \right)$$

De donde podremos definir

$$\phi(P) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k|} \quad (1.17)$$

de tal manera que

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (1.18)$$

lo que concuerda con (1.10). Es interesante mencionar que existirán casos en los que resultará más fácil calcular el potencial primero y a partir de la ec. (1.18) obtener el campo.

Hay cierta ambigüedad en la definición del potencial escalar, puesto que en el caso de definir

$$\phi'(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k|} + C$$

donde C es una constante arbitraria, la ecuación (1.18) arrojaría la misma expresión para \mathbf{E} . Es decir, **el potencial escalar incluye una constante aditiva arbitraria y puede asignársele a ésta cualquier valor conveniente**. En general, $C = 0$, es decir, el potencial escalar se anula en el infinito. Existe una manera muy útil de expresar la relación entre el campo electrostático y el potencial escalar:

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_1^2 \nabla\phi \cdot d\mathbf{s} = - \int_1^2 d\phi = -\Delta\phi$$

donde se ha aplicado que $du = \nabla\phi \cdot d\mathbf{l}$. Entonces se tiene que

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\Delta\phi \quad (1.19)$$

Lo que quiere decir que la integral de línea del campo electrostático depende únicamente del valor del potencial escalar en los puntos extremos: el valor de la integral es independiente de la trayectoria.

El potencial escalar (eléctrico) tiene importancia física y se relaciona con el trabajo realizado al mover una carga de un punto a otro. Al mover una unidad de carga del punto P_1 al punto P_2 en un campo eléctrico hay que realizar un trabajo en contra del campo:

$$W = q \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -q\Delta\phi = -\Delta\phi \quad (1.20)$$

donde se ha definido la **energía potencial electrostática** de una carga q como $U = q\phi$. Nótese que el hecho de que el trabajo no dependa de la trayectoria es perfectamente lógico (en caso contrario se violaría el Principio de Conservación de la energía). Por las propiedades del gradiente, las líneas de campo eléctrico siempre serán perpendiculares a las líneas equipotenciales y a las superficies equipotenciales de ϕ .

1.5. Las ecuaciones de Poisson y Laplace

Si en la ecuación (1.9) introducimos el potencial escalar

$$\nabla \cdot (-\nabla\phi) = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \Rightarrow -\nabla^2\phi = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación de Poisson**:

$$\boxed{\nabla^2\phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}} \quad (1.21)$$

Ésta es una nueva ecuación diferencial que relaciona la variación de trabajo o potencial en cada punto con la densidad de carga en este punto. En la mayoría de los puntos del espacio no existe carga, por lo tanto el segundo miembro de la ecuación de Poisson es nulo, es decir:

$$\boxed{\nabla^2\phi = 0} \quad (1.22)$$

Ésta es la ecuación para las regiones libres de carga, conocida como **ecuación de Laplace**. Este formalismo será utilizado en el futuro para llevar a cabo un desarrollo pormenorizado dentro de la resolución de problemas electrostáticos mediante métodos especiales.

1.6. El dipolo eléctrico

1

1.6.1. Campo y potencial creados por un dipolo

Un dipolo eléctrico es un sistema de cargas simples constituido por dos cargas de igual magnitud y de signo opuesto separadas una distancia d , tal y como se aprecia en la figura 4.7. Denotaremos por \mathbf{R} al

¹La versión completa de esta sección, incluyendo el desarrollo multipolar del potencial, puede consultarse en [8]

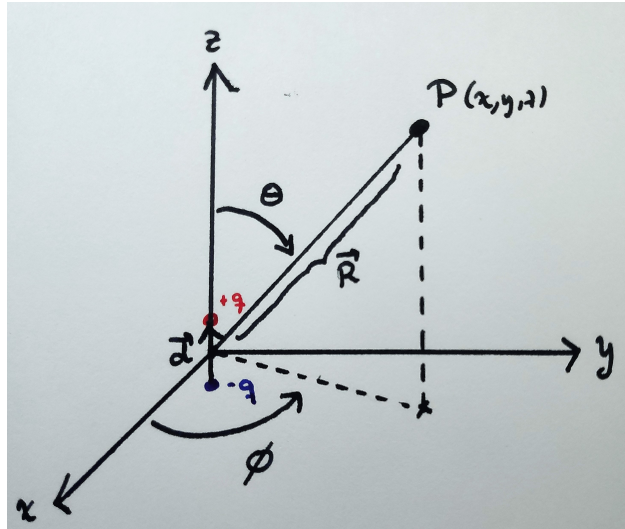


Figura 1.2: Dipolo eléctrico

vector que va del origen al punto P , de módulo $|\mathbf{R}| = R$ y por \mathbf{d} al vector que va desde la carga negativa a la positiva.

Partimos de la expresión del campo electrostático creado por el dipolo, en coordenadas esféricas, deducido en las clases expositivas:

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (1.23)$$

donde $\mathbf{p} \equiv q\mathbf{d}$, $|\mathbf{p}| = p$ es el momento dipolar, magnitud vectorial de unidades $C \cdot m$. Antes de continuar conviene destacar algunas características de (1.23). En primer lugar, la expresión es válida siempre que P esté muy alejado del dipolo, es decir, siempre que $d \ll R$, pues ha sido una de las hipótesis usadas para simplificar la expresión inicial. En segundo lugar, se puede apreciar que \mathbf{E} no depende de la coordenada ϕ , algo que era esperable dada la simetría del problema.

Una vez puntualizadas estas aclaraciones pasaremos a intentar eliminar la dependencia en θ de la ecuación anterior. Para ello, en primer lugar observaremos que $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{z}}$ puesto que este tiene la misma dirección que \mathbf{d} . Si empleamos la relación de coordenadas $\hat{\mathbf{z}} = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ llegamos a la expresión del momento dipolar en coordenadas esféricas:

$$\mathbf{p} = p (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (1.24)$$

Ahora tomamos la ec.(1.23) y sumamos $\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ a ambos lados:

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

Sin más que tener en cuenta que $\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}} = p \cos \theta$ y simplificar llegamos a que:

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (1.25)$$

En cuanto al potencial eléctrico, este ya ha sido calculado previamente en las clases expositivas:

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (1.26)$$

En este caso para eliminar la dependencia en θ era suficiente con aplicar la definición de producto escalar. Es importante destacar que, tal y como se aprecia en las ec. (1.25) y (1.26) el campo decrece con $\frac{1}{R^3}$ y el potencial con $\frac{1}{R^2}$. El hecho de que decrezcan más rápido con la distancia que un sistema con dos cargas del mismo signo es perfectamente lógico, puesto que para una distancia al dipolo lo suficientemente

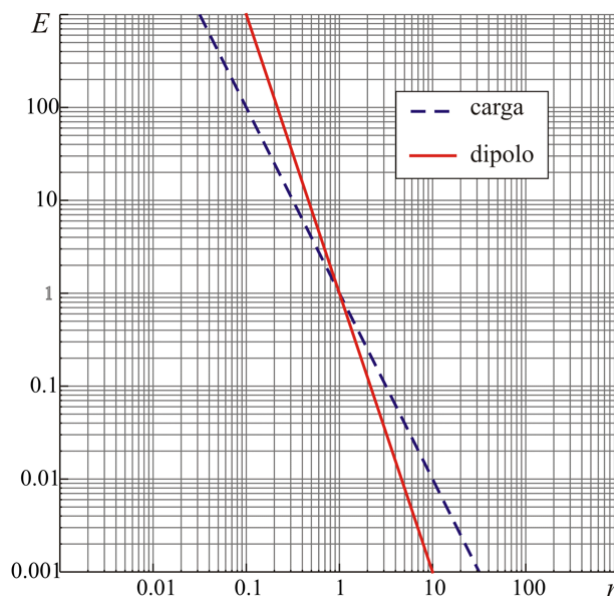


Figura 1.3: Comparamos como disminuye el módulo del campo eléctrico de una carga eléctrica y el de un dipolo eléctrico (escala logarítmica). Claramente el del dipolo disminuye más rápido. Fuente: [Departamento de Física Aplicada III - US](#)

grande, la carga del sistema es nula.

Otra manera de obtener una expresión del campo en forma vectorial (a saber, independiente del sistema de coordenadas utilizado) es partir de la expresión del potencial (ec.(1.26)) tal y como hicimos en clase, pero ahora aplicando ciertas relaciones del análisis vectorial:

$$E = -\nabla V = -\nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) \quad (1.27)$$

Si tenemos en cuenta la expresión del gradiente de un producto escalar:

$$\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{R} + (\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{p} + \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{R}) + \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{p})$$

donde $(\mathbf{R} \cdot \nabla)\mathbf{p} = \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{p}) = \mathbf{0}$ pues \mathbf{p} es constante. Pero además $\nabla \times \mathbf{R} = \mathbf{0}$ dada la definición de \mathbf{R} como vector posición, resultando:

$$\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{R} = \mathbf{p} \quad (1.28)$$

sin más que aplicar las propiedades del operador nabla. Regresando a la expresión del campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) = -\frac{\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{R})}{4\pi\epsilon_0 R^3} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{R})\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)$$

Aplicando las propiedades deducidas anteriormente:

$$\mathbf{E} = \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{R^5} \mathbf{R}$$

En conclusión

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}) - R^2\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 R^5} \quad (1.29)$$

Expresión idéntica a la obtenida en (1.25).

1.6.2. Acción de un campo electrostático sobre un dipolo eléctrico

En esta sección estudiaremos el comportamiento de un dipolo cuando se encuentra en una región en la que hay presente un campo electrostático externo.

Campo electrostático no uniforme

Para analizar como afecta un campo electrostático arbitrario (no uniforme) a un dipolo eléctrico comenzaremos por el caso más simple, es decir, un dipolo orientado en la misma dirección que el campo (por ejemplo, en la dirección del eje OX). Las fuerzas sobre las cargas tendrán por lo tanto la dirección del eje OX y su resultante vendrá dada por el principio de superposición:

$$F = q(E_+ - E_-) \approx q \frac{\partial E}{\partial x} \Delta x \underset{p=q\Delta x}{=} p \frac{\partial E}{\partial x} \quad (1.30)$$

donde E_+, E_- denota el valor de campo en la Luego el dipolo en esta disposición estará sometido a una fuerza que lo empujará hacia la región de campo más intensa: si $E_+ > E_-$ la fuerza apuntará en la misma dirección que \mathbf{p} , mientras que si $E_+ < E_-$ la fuerza apuntará en sentido contrario, pero siempre hacia la región de más intensidad del campo.

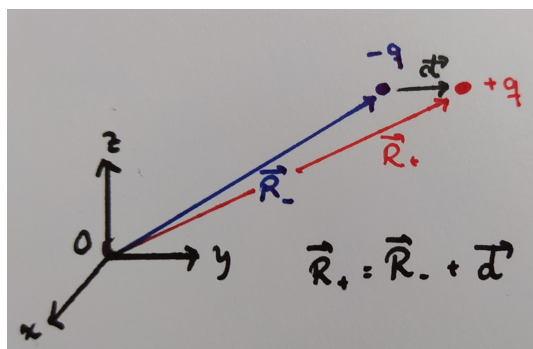


Figura 1.4: Situación del dipolo eléctrico en el espacio

Consideremos ahora un caso más general, donde el dipolo no está necesariamente orientado en la misma dirección que la del campo. Si denotamos por \mathbf{R}_+ al vector posición de la carga positiva y por \mathbf{R}_- al de la carga negativa, tendremos que la fuerza que actuará sobre la carga negativa vendrá dada por

$$\mathbf{F}_- = -q\mathbf{E}(\mathbf{R}_-) \quad (1.31)$$

Para el caso de la carga positiva, aplicaremos que $\mathbf{R}_+ = \mathbf{R}_- + \mathbf{d}$ y haremos el desarrollo de Taylor de primer orden del campo:

$$\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E}(\mathbf{R}_- + \mathbf{d}) \approx q(\mathbf{E}(\mathbf{R}_-) + (\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{E}) \quad (1.32)$$

Aplicando el principio de superposición obtenemos la fuerza neta

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = -q\mathbf{E}(\mathbf{R}_-) + q(\mathbf{E}(\mathbf{R}_-) + (\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{E}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} \quad (1.33)$$

Vamos a tratar de operar un poco más aplicando la fórmula para el gradiente de un producto escalar (véanse los apuntes de análisis vectorial del Tema 1):

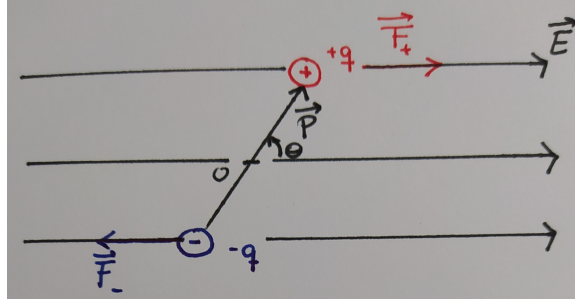


Figura 1.5: Dipolo eléctrico en un campo electrostático uniforme.

$$\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = \underbrace{\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{p})}_{(1)} + \underbrace{\mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E})}_{(2)} + \underbrace{(\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{p}}_{(3)} + (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} \quad (1.34)$$

En el último paso se ha tenido en cuenta que \mathbf{p} no depende de la posición por lo que $\nabla \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{p} = \mathbf{0}$ y (1) y (3) se anulan. Por otro lado, por uno de los postulados de la electrostática en el espacio libre, se tiene que $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ (el campo electrostático es irrotacional) con lo que (2) también se anula. Entonces $(\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ y la ecuación (1.33) queda como:

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \quad (1.35)$$

Además, tal y como hemos visto antes, el campo electrostático es irrotacional, algo que se verifica si y solo si el campo es conservativo, es decir, si existe una función escalar U tal que

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad (1.36)$$

donde U será la energía potencial. Combinando las ecuaciones (1.35) y (1.36) obtenemos una expresión para la energía potencial de un dipolo eléctrico con momento dipolar \mathbf{p} :

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (1.37)$$

Otra manera de obtener la energía potencial del dipolo eléctrico es a partir de la suma de las energías potenciales de las cargas:

$$U = qV(\mathbf{R}_+) - qV(\mathbf{R}_-) = q(V(\mathbf{R}_- + \mathbf{d}) - V(\mathbf{R}_-)) = q\mathbf{d} \cdot \nabla V = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (1.38)$$

Que es la misma expresión que la de la ec.(1.37), tal y como era de esperar.

Campo electrostático uniforme

Pasaremos ahora a estudiar como se comporta el dipolo eléctrico en un campo electrostático uniforme. En este caso la fuerza neta sobre el sistema es nula, puesto que la fuerza sobre las cargas es de igual módulo y dirección pero de sentido opuesto. Nótese que en el caso anterior esto no era así porque \mathbf{E} no tomaba (necesariamente) el mismo valor en la posición de cada una de las cargas. Aunque la fuerza neta es cero, el par de fuerzas producen un momento de torsión $\boldsymbol{\tau}$ que vendrá dado por

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{d} \times \mathbf{F} = \mathbf{d} \times (q\mathbf{E}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (1.39)$$

Es decir, sobre el dipolo se ejercerá un par de fuerzas que tratarán de orientarlo en la dirección del campo eléctrico, de tal que manera que el momento dipolar se alinee con el campo \mathbf{E} .

Pasemos ahora a analizar la energía potencial del dipolo en esta situación. El trabajo dW necesario para

girar el dipolo un ángulo $d\theta$ viene dado por

$$dW = \tau d\theta = pE \sin \theta d\theta \quad (1.40)$$

Teniendo en cuenta que se trata de un campo conservativo

$$W = \Delta U = \int_{\theta_i}^{\theta_f} pE \sin \theta d\theta = pE(\cos \theta_i - \cos \theta_f) \quad (1.41)$$

Si seleccionamos un ángulo inicial de referencia $\theta_i = 90^\circ$ tendremos que $\cos \theta_i = 0$. Además podemos seleccionar $U_i = 0$ para $\theta_i = 90^\circ$ con lo que resulta

$$U = -pE \cos \theta_f = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (1.42)$$

Claramente la disposición de menor energía se corresponde con $\theta = 0^\circ$, es decir, con $\mathbf{p} \parallel \mathbf{E}$, tal y como deducimos anteriormente.

1.6.3. Interacción dipolo-dipolo

Estudieemos ahora como afecta el campo creado por un dipolo a otro dipolo. Supongamos dos dipolos de momento dipolar \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 situados en \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 respectivamente. Denotaremos por \mathbf{E}_1 al campo en \mathbf{r}_1 creado por el segundo dipolo, el cual obtenemos a partir de la ec.(1.25):

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p}_2 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 \mathbf{p}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^5} \quad (1.43)$$

Nótese que en este caso hemos empleado los vectores no normados, de ahí el diferente exponente del módulo. Teniendo en cuenta la ecuación (1.33) se podrá escribir

$$\mathbf{F}_{12} = (\mathbf{p}_1 \cdot \nabla_1) \mathbf{E}_1 \quad (1.44)$$

siendo ∇_1 la derivada con respecto a las coordenadas de \mathbf{r}_1 . La fuerza de un dipolo sobre otro obedecerá la tercera ley de Newton: $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Si consideramos ahora el campo electrostático creado por el segundo dipolo y acercamos desde el infinito el primer dipolo obtendremos la energía potencial, como el trabajo necesario para realizar dicha aproximación:

$$U_{12} = -\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p}_2 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))(\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^5} \quad (1.45)$$

Apréciase además que $U_{12} = U_{21}$, puesto que lo único que cambia prácticamente en la ecuación anterior es el sentido del vector que une los dipolos, y los signos se anulan entre sí.

1.7. El Teorema de Earnshaw

2

El teorema de Earnshaw afirma lo siguiente:

Un potencial escalar $\phi(x, y, z)$ que satisfaga la ecuación de Laplace (1.22) en una región del espacio τ no presenta ningún máximo o mínimo local en τ ; todos sus puntos críticos son puntos de silla.

²Para estudiar la demostración de este teorema y sus consecuencias es recomendable consultar [7]

1.8. Resultados de ejercicios

Capítulo 2

Electrostática en medio materiales

2.1. Conductores en un campo electrostático

Un **conductor** es una región en la que las cargas son libres de moverse bajo la influencia de un campo eléctrico. Veamos algunas de las propiedades más interesantes de un conductor en equilibrio electrostático.

1. Anulación del campo

La condición de equilibrio electrostático requiere que las cargas se encuentren en reposo en el material conductor. Esto es, no se mueven, pese a que podrían hacerlo (pues un material conductor permite el desplazamiento de carga por su interior).

Si las cargas se encuentran en equilibrio, la fuerza sobre cada una de ellas debe ser nula:

$$\mathbf{0} = \mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}_q) \quad (2.1)$$

Puesto que esto tiene que ser cierto para cada carga en cualquier punto del interior del material conductor, ello implica que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{r} \in \tau \quad (2.2)$$

siendo τ el volumen del conductor. Hay que insistir que esta propiedad se cumple para un conductor en equilibrio. Si el conductor no está en equilibrio, porque está circulando una corriente por su interior, entonces no es cierto que $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. No hay que pensar que, por el simple hecho de ser conductor, ya el campo se anula en un material. La misma salvedad al resto de las propiedades que siguen.

2. Equipotencialidad

Supongamos dos puntos, A y B, en el material conductor. La diferencia de potencial entre estos dos puntos es:

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.3)$$

donde la integral se calcula a lo largo de una curva arbitraria que conecte A y B. Puesto que podemos elegir la que queramos, podemos tomar una que recorra exclusivamente el interior del material conductor, en el cual el campo eléctrico es nulo. En ese caso:

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{0} \cdot d\mathbf{r} = 0 \Rightarrow V_A = V_B \quad (2.4)$$

Por tanto, todo el volumen del conductor es equipotencial.

$$\phi(\mathbf{r}) = V_0 \quad \forall \mathbf{r} \in \tau \quad (2.5)$$

Esta propiedad se cumple siempre que exista ese camino que conecte los dos puntos. Por ejemplo, si tenemos dos bloques metálicos unidos por un fino cable y el sistema está en equilibrio, los dos bloques están al mismo potencial, porque podemos hallar un camino, que pasa por el cable, para cualesquiera dos puntos de los bloques. Si el cable de conexión no está presente, los potenciales de los dos conductores, aunque estén en equilibrio, no tienen por qué ser iguales. En cada uno será una constante, pero estas constantes pueden ser diferentes.

3. Densidad volumétrica nula

La ley de Gauss en forma diferencial nos permite calcular la densidad de carga, conocido el campo eléctrico. Para cualquier punto del interior del material conductor se tendrá que:

$$\rho(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{0} = 0 \quad (2.6)$$

La densidad volumétrica de carga es nula en todos los puntos del interior del material conductor en equilibrio.

Este resultado se puede interpretar físicamente de la siguiente forma: si hubiera una densidad de carga neta, necesariamente habría campo en los alrededores (pues las cargas son manantiales y sumideros de campo eléctrico), lo que rompería la situación de equilibrio electrostático.

Por supuesto, cuando decimos que la densidad de carga de volumen es nula, no estamos diciendo que no haya carga alguna en el material. Un material conductor no es más que un conjunto de átomos, cada uno de los cuales se compone de numerosos protones y electrones, cada uno con su carga eléctrica. Por tanto, en cada elemento de volumen $d\tau$ existen miles de millones de cargas individuales. Lo que se anula es la carga neta en cada elemento de volumen.

4. Densidad superficial no nula

Si el conductor se encuentra en equilibrio electrostático, la densidad de carga de volumen es nula, según acabamos de ver. Por tanto todo exceso de carga debe encontrarse en la superficie:

$$\sigma_s(\mathbf{r}) \neq 0 \quad (2.7)$$

En un conductor en equilibrio electrostático, la única densidad de carga es superficial.

En el caso de una densidad superficial no hay conflicto con la ley de Gauss, pues al ser el campo discontinuo (y no derivable, por tanto) no se puede aplicar la forma diferencial de la ley.

Esta densidad de carga, no obstante, es desconocida a priori. dado que las cargas pueden moverse por el conductor, cualquier alteración del sistema (moviendo los demás conductores o variando su carga) provoca una redistribución de la carga y por tanto una modificación de la densidad de carga superficial.

Si toda densidad de carga es superficial, la carga total de un conductor en equilibrio se calculará como

$$Q = \oint \sigma_s dS \quad (2.8)$$

Incluso cuando $Q = 0$ la densidad de carga superficial será distinta de cero y desconocida de antemano, ya que los átomos del material proporcionan electrones suficientes para que se acumule

una densidad superficial (aunque la negativa de algún punto de la superficie debe verse compensada con la positiva de otro, si la carga total es cero).

5. Líneas de campo prohibidas

Supongamos un conductor en equilibrio electrostático, y con una densidad de carga superficial que es positiva en algún punto de la superficie y negativa en otro. ¿Puede haber alguna línea de campo eléctrico que, partiendo de la superficie, donde $\sigma > 0$, vaya a parar a la misma superficie donde $\sigma < 0$? Después de todo tendríamos una línea de campo que va de las cargas positivas a las negativas, lo que parece razonable.

La respuesta es que no, no puede haber una línea de campo eléctrico que partiendo de un conductor, vaya a parar a él mismo.

Una explicación sencilla es que el campo electrostático siempre va de mayor a menor potencial y si todo el conductor se encuentra al mismo potencial, esta línea incumpliría esta propiedad.

6. **Ortogonalidad a la superficie. Campo en el exterior.** Si $\mathbf{E}_t \neq \mathbf{0}$, habría una fuerza tangencial sobre las cargas móviles que produciría un movimiento de cargas paralelamente a la superficie, por tanto en la superficie de un conductor, \mathbf{E} debe ser normal a la superficie:

$$\mathbf{E} = E\mathbf{n} \quad (2.9)$$

Si empleamos la ley de Gauss en una superficie gaussiana cilíndrica de sección a cuyo lado curvo es paralelo a \mathbf{n} introducido parcialmente en el conductor:

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \iint_{\text{tapa superior}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = Ea = \frac{\sigma a}{\epsilon_0}$$

con lo que

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} \mathbf{n} \quad (2.10)$$

En consecuencia de todo esto, cuando se carga un conductor, las cargas se ordenan de forma que el campo eléctrico resultante, debido a todas las cargas, se anule en el interior del conductor. Si un conductor se coloca en un campo eléctrico, se producirá un movimiento transitorio de cargas dentro del conductor, dando lugar a un nuevo campo que, añadido al exterior, provoca un campo resultante nulo.

Es, por tanto, imposible tener una carga neta en una región de un conductor sin que exista, en otra parte, un conjunto de cargas tal que como resultado se anule el campo en el interior del conductor. Por ejemplo, es imposible tener una densidad de carga en una superficie de un plano conductor aislado sin que exista una densidad de carga idéntica en el otro lado para así producir en el interior de la placa dos campos de igual intensidad, pero de sentidos opuestos. Asimismo, si una placa de un condensador plano paralelo se carga en su cara interna, una carga igual y opuesta deberá existir en la cara interna de la placa opuesta, de forma que el campo \mathbf{E} dentro de las placas se anule.

2.1.1. Conductores a carga constante y a potencial constante

Un conductor en equilibrio puede tener fijado su potencial o su carga total, pero no ambas magnitudes a la vez. Analicemos ambos casos:

- **Conductor aislado o a carga constante:** Es aquél que no tiene ninguna conexión con fuente alguna ni con tierra (en los esquemas, que no hay ningún hilo que llegue a él). En un conductor

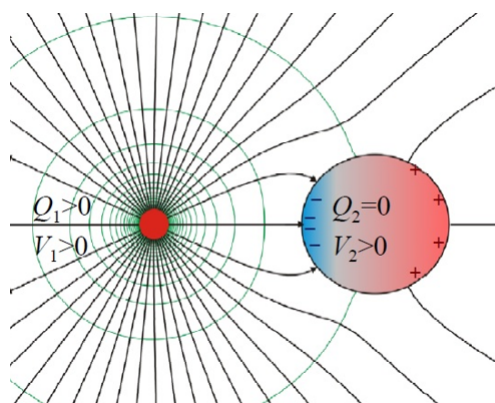


Figura 2.1: Ejemplo de conductores a carga constante

aislado la carga total permanece constante (ya que no puede irse a ningún sitio), aunque su distribución es cambiante, dependiendo de las circunstancias externas. En este caso, podemos afirmar que el potencial tiene el mismo valor en todos los puntos, aunque no sepamos cuanto vale y que conocemos la carga total. Caso particular importante es el de un conductor aislado y descargado, en el cual no solo sabemos que la carga es constante, sino que además $Q = 0$.

- **Conductor a potencial constante:** Es aquel que está conectado a una fuente de tensión que fija su potencial en un valor fijado. La fuente hace esto metiendo o sacando cargas del conductor (del mismo modo que una bomba mete agua en un depósito para mantener su nivel). Esto quiere decir que no sabemos cuanta carga hay en el conductor, ya que ésta depende de las circunstancias externas. Entre las fuentes de potencial está la tierra o masa, que no es una verdadera fuente (en el sentido de una pila o batería) sino una conexión a un conductor gigantesco situado al potencial que tomamos como 0. Cuando un conductor está conectado a tierra su voltaje es 0 y pueden llegar o salir de él todas las cargas que sean necesarias para mantener este voltaje.

Veamos ahora unos ejemplos para aclarar estas situaciones:

1. *A una esfera descargada 2 se acerca una esfera de carga positiva 1*

- La esfera cargada atrae cargas negativas de la esfera descargada a zonas más próximas, redistribuyéndose las cargas. Por ser neutro se acumulan cargas positivas en el lado opuesto.
- La densidad de carga superficial ρ_s no es nula, aunque $Q_2 = 0$. Hay líneas de campo que van de la esfera hacia el infinito.
- El potencial de la esfera es positivo y depende de Q_1 .

Conclusión: La carga total en 2 es 0 pero el potencial es no nulo.

2. *A una esfera a tierra 1 se acerca una esfera de carga positiva 1*

- La carga positiva atrae cargas negativas a la zona próxima. Pero ahora estas cargas positivas provienen de la fuente de tensión (la tierra en este caso particular).
- No puede haber líneas de campo de la esfera al infinito, pues en ambas *regiones* hay el mismo potencial.
- En la esfera 2 sólo entran líneas, $Q_2 < 0$ y su valor depende de Q_1 .

Conclusión: El potencial en la esfera 2 es nulo pero no así su carga.

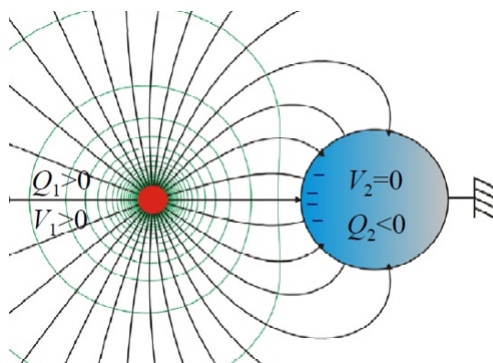


Figura 2.2: Ejemplo de conductores a potencial constante

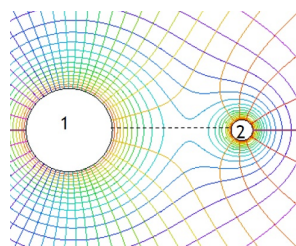


Figura 2.3: Dos esferas unidas por un cable.

2.1.2. El problema de las puntas

Supongamos dos esferas conductoras conectadas por un hilo y separadas. Al tratarse de un conductor en equilibrio, el potencial será el mismo en ambas esferas¹. Utilicemos esto para calcular la carga en cada esfera:

$$Q_1 \approx \pi \epsilon_0 R_1 V_0$$

$$Q_2 \approx 4\pi \epsilon_0 R_2 V_0$$

Si $R_1 > R_2$ tendremos que $Q_1 > Q_2$: la carga es mayor en la grande. Ahora, si calculamos la densidad superficial de carga de cada una:

$$\rho_{s1} = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} = \frac{\epsilon_0 V_0}{R_1} = \frac{\epsilon_0 V_0}{R_1}$$

$$\rho_{s2} = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} = \frac{\epsilon_0 V_0}{R_2} = \frac{\epsilon_0 V_0}{R_2}$$

Entonces $\rho_{s1} < \rho_{s2}$: la densidad es mayor en la pequeña. Aplicando la ecuación para el campo en las proximidades exteriores de un conductor en equilibrio vemos que:

$$E_1 = \frac{\rho_{s1}}{\epsilon_0} < E_2 = \frac{\rho_{s2}}{\epsilon_0} \tag{2.11}$$

El campo es más intenso cerca de la esfera pequeña (las superficies equipotenciales se hayan más próximas).

2.1.3. Cavidades en conductores

Consideremos la situación siguiente: un conductor en equilibrio electrostático que contiene una cavidad en su interior. La superficie del conductor tiene, entonces, dos partes: una superficie exterior S_e y una superficie interior S_i . Además imaginaremos una superficie arbitraria S contenida en el volumen del conductor, de tal manera que $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ en todo S . De esto se deduce, aplicando la Ley de Gauss que la

¹Despreciamos el efecto del campo de una esfera sobre la otra.

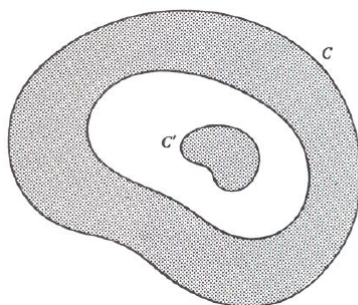


Figura 2.4: Conductor interior en la cavidad

carga neta encerrada en S debe ser nula $Q_{int} = 0$. Por lo tanto:

Cuando un conductor tiene una cavidad en su interior, la carga sobre dicho conductor se distribuye sobre la superficie exterior, siempre que en el hueco no exista carga. El campo en el interior del conductor y en el hueco es nulo, por tanto su potencial es constante.

Supóngase que existe ahora una carga dentro de la cavidad Q_{cav} . Para que $Q_{int} = 0$ en S deberá existir alguna carga igual y opuesta en el interior de S . Al encontrarse el conductor en equilibrio electrostático sabemos que necesariamente el exceso de cargas se encuentran en la superficie; por lo que esa carga Q' debe encontrarse sobre la superficie interior con lo que:

$$Q_{int} = 0 = Q' + Q_{cav} \Rightarrow Q' = -Q_{cav} \quad (2.12)$$

Si antes de que se insertara Q_{cav} el conductor era neutro, deberá permanecer neutro, con lo que aparecerá en la superficie exterior una carga $Q_e = -Q' = Q_{cav}$. De esta manera, **una carga dentro de la cavidad puede hacer sentir su presencia en el exterior por medio de la carga inducida Q_e .**

Si tenemos un conductor interior en la cavidad, la situación es la siguiente: Si el conductor c' no posee carga, no existe campo \mathbf{E} dentro de la cavidad, por lo que c' posee el mismo potencial que el conductor envolvente c , pudiendo colocar cargas “sobre” o “fuera” de c sin que origine ningún campo electrostático en c' . El conductor c' está blindado o apantallado (caja de Faraday), lo que es de gran utilidad, puesto que si conectamos el conductor c a tierra, el conductor c' no se ve afectado por las variaciones externas del campo.

2.2. Dieléctricos en campo electrostático

Los **dieléctricos** se distinguen de los conductores porque no tienen cargas libres que se pueden mover a través del material, al ser sometidos a un campo eléctrico. En los dieléctricos, todos los electrones están ligados, por lo que el único movimiento posible es un ligero desplazamiento de las cargas positivas y negativas en direcciones opuestas. Este desplazamiento es, en general, pequeño comparado con las distancias atómicas.

Un dieléctrico en el que se ha producido este desplazamiento de las cargas se dice está **polarizado**, y que sus moléculas tienen un **momento dipolar inducido**. Estos dipolos crean su propio campo eléctrico, que se suma al debido a las cargas externas. El campo de los dipolos y el campo exterior aplicado pueden tener magnitudes comparables.

Al aplicar un campo electrostático externo los dipolos individuales de un dieléctrico polar tienden a alinear su momento dipolar con el campo electrostática externo, produciéndose lo que se conoce como

polarización del dieléctrico.

Con el fin de estudiar los dieléctricos, formularemos la siguiente hipótesis:

En lo que concierne a sus propiedades eléctricas, la materia neutra es equivalente a una configuración de dipolos eléctricos.

Para ello definimos el **vector polarización \mathbf{P}** (o directamente polarización), para analizar el efecto macroscópico de los dipolos inducidos, como el momento dipolar por unidad de volumen:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \mathbf{P}_k}{\Delta v} = \frac{d\mathbf{p}}{dv} [C/m^2] \quad (2.13)$$

siendo n el número de moléculas por unidad de volumen. Cuando no hay campo electrostático externo, los dipolos individuales de un dieléctrico polar están orientados de forma aleatoria y no producen un momento dipolar neto a nivel macroscópico. Por esta definición se tendrá que el momento dipolar de un volumen V de material será:

$$\mathbf{p} = \iiint_V \mathbf{P}(\mathbf{r}) dV \quad (2.14)$$

Otro concepto importante es el de **densidad superficial de carga de polarización equivalente** o **densidad superficial de carga ligada**, definida como:

$$\rho_{ps} \equiv \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} [C/m^2] \quad (2.15)$$

Para una superficie s que limita un volumen v la carga neta que sale fuera de v como resultado de la polarización es:

$$Q = \oint_s \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.16)$$

Dado que si el dieléctrico estaba descargado debe seguir descargado, la carga neta que permanece dentro de v debe ser $-Q$:

$$\int_v \rho_{pv} dv = -Q = -\oint_s \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_v (-\nabla \cdot \mathbf{P}) dv \quad (2.17)$$

donde se ha aplicado el Teorema de la Divergencia. Dado que esta ecuación debe de ser cierta para todo v , los integrandos deben de ser iguales en todo punto:

$$\rho_{pv} \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P} [C/m^3] \quad (2.18)$$

Que se define como **densidad volumétrica de carga de polarización equivalente** o **densidad volumétrica de carga ligada**. Otra manera de ver como surgen estas definiciones es calculando el potencial que producirá un cuerpo polarizado en un punto de campo \mathbf{r} . Sabemos que el momento dipolar del elemento infinitesimal de volumen dV' es $d\mathbf{p}' = \mathbf{P}(\mathbf{r}')dV'$ y su contribución al potencial en \mathbf{r} viene dado por:

$$d\phi = \frac{d\mathbf{p}' \cdot \hat{\mathbf{R}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{R}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} dV' \quad (2.19)$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Para encontrar el potencial total, integramos:

$$\phi(\mathbf{r}) = \iiint_{V'} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{R}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dV' \quad (2.20)$$

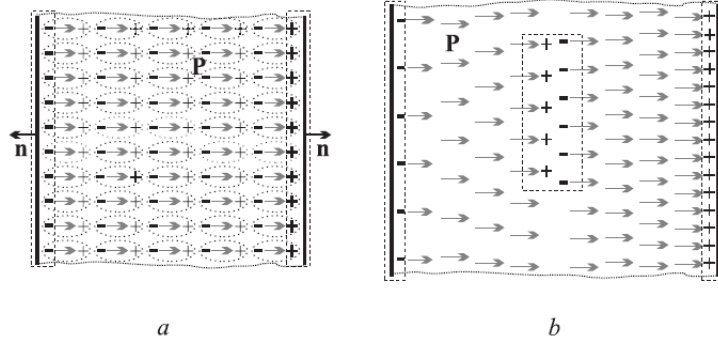


Figura 2.5: Dos dieléctricos con polarización uniforme y no uniforme, respectivamente.

donde ∇ representa la actuación del operador nabla con respecto a las coordenadas del punto fuente, cumpliéndose $-\nabla'(1/R) = -\frac{\mathbf{\hat{R}}}{R^2}$. Aplicando una de las identidades del operador nabla podemos expresar:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{R} \right) - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{R} \quad (2.21)$$

Sustituyendo en la integral y aplicando el Teorema de la Divergencia:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} -\frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{R} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \left(\frac{\mathbf{P}}{R} \right) \cdot d\mathbf{A} \quad (2.22)$$

Si comparamos esta expresión con la del potencial creado por cargas libres, se observa que el potencial anterior sería exactamente el potencial creado por densidades de carga $\rho_{pv} = -\nabla' \cdot \mathbf{P}$ y $\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Las primas del nabla suelen omitirse, entendiéndose que se diferencia con respecto a las coordenadas del punto fuente.

Vamos a hacer una breve interrupción para comentar el significado físico de estas nuevas magnitudes. Consideremos en primer lugar la imagen 2.5 a, donde se muestra un dieléctrico uniformemente polarizado. Los dipolos que contribuyen a la polarización \mathbf{P} están alineados de forma que en el interior se compensa la carga positiva de un dipolo con la negativa del siguiente, de tal manera que solo quedan sin compensar las negativas de la superficie límite izquierda y las positivas correspondientes a la superficie de la derecha. Si aplicamos la definición de densidad superficial de carga de polarización equivalente vemos que para la superficie de la izquierda $\rho_{ps} = -P$ y para la superficie de la derecha $\rho_{ps} = P$.

Cuando tenemos un material cuya polarización no es uniforme podemos explicar el proceso con el modelo indicado en la figura 2.5 b. En el modelo se supone que la polarización crece de izquierda a derecha, y se representa gráficamente dibujando más dipolos en un plano que en el precedente. En la zona central se ha dibujado la sección de una caja que incluye la parte final de un conjunto de dipolos y la inicial del siguiente. Como la polarización no es uniforme el flujo de la polarización que entra en la cara de la izquierda es menor que el flujo saliendo por la cara derecha; por tanto la divergencia es positiva y como consecuencia la densidad de carga de polarización ρ_{pv} es distinta de cero, en este ejemplo negativa. En la figura se pone de manifiesto porque hay más cargas negativas que positivas en el volumen considerado. Vemos por tanto que la existencia de ρ_{pv} es consecuencia de la falta de uniformidad en la polarización. Cuando \mathbf{P} es uniforme $-\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$.

Es necesario por tanto modificar la expresión de la divergencia postulada para el campo electrostático:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_v + \rho_{pv}) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_v - \nabla \cdot \mathbf{P}) \Rightarrow \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_v \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_v \quad (2.23)$$

En conclusión, entonces:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_v \quad (2.24)$$

Vamos a definir el **vector desplazamiento eléctrico** como:

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad [C/m^2]} \quad (2.25)$$

Con lo que la divergencia del vector solo depende de la densidad de carga libre (las líneas del campo \mathbf{D} nacen y mueren en las densidades de carga libre). Integremos ambos lados de esta ecuación:

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{D} \cdot dv = \int_v \rho_v dv \quad (2.26)$$

Y sin más que aplicar el Teorema de la Divergencia:

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot ds = Q \quad (2.27)$$

Por lo tanto, las ecuaciones básicas de los campos electrostáticos son:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v} \quad (2.28)$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}} \quad (2.29)$$

Nótese que $\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{P}$. Atendiendo al enunciado del teorema de Helmholtz, apartado 1.21, las fuentes de un campo son su divergencia y rotacional, por tanto la otra fuente de \mathbf{D} es $\nabla \times \mathbf{P}$, que será nula en medios homogéneos, \mathbf{P} constante, pero no en los heterogéneos.

2.2.1. Polarización del dieléctrico

Al aplicar un campo electrostático \mathbf{E} sobre un dieléctrico polar los dipolos individuales de este tienden a alinearse con el campo (polarización del dieléctrico). Cuando no hay campo externo \mathbf{E} , los dipolos individuales de un dieléctrico polar están orientados de forma aleatoria y no producen un momento dipolar neto a nivel macroscópico.

Consideremos que introducimos una carga puntual, y ésta es la que crea el campo \mathbf{E} . Los átomos después de ser polarizados crean su propio campo, llamado **campo inducido** \mathbf{E}_i . Esto hace que el campo resultante sea de la forma

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{r^3} \mathbf{r} \quad (2.30)$$

que es diferente del campo de una carga puntual en el espacio vacío. Se demostrará que la permitividad ε del medio puede considerarse como una medida de la polarizabilidad del dieléctrico.

Hasta ahora no hemos demostrado la neutralidad de carga. Para ello no hace falta más que desarrollar los componentes que intervienen.

$$Q_p = \int_{V'} \rho_p dv' + \int_{S'} \sigma_p ds' = - \int_{V'} \nabla \cdot \mathbf{P} dv' + \int_{S'} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} ds' \quad (2.31)$$

Aplicando el Teorema de la Divergencia

$$\int_{V'} \nabla \cdot \mathbf{P} dv' = \int_{S'} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} ds' \quad (2.32)$$

Entonces:

$$Q_p = - \int_{S'} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} ds' + \int_{S'} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} ds' = 0 \quad (2.33)$$

Para un cuerpo dieléctrico de forma arbitraria las densidades de carga de polarización pueden usarse para determinar el potencial debido a la polarización del dieléctrico:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{s'} \frac{\rho_{ps} ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho_{pv} dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.34)$$

2.2.2. Susceptibilidad eléctrica

Cuando las propiedades dieléctricas del medio son **lineales e isotrópicas**, la polarización es directamente proporcional a \mathbf{E} y la constante de proporcionalidad es independiente del campo:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (2.35)$$

χ_e es una magnitud adimensional denominada **susceptibilidad eléctrica**. Si consideramos un medio isotrópico χ_e no depende de la dirección del campo electrostático, si es un medio homogéneo χ_e es independiente de las coordenadas espaciales.

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.36)$$

Donde $\epsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ se denomina **permitividad relativa o constante dieléctrica del medio**. El coeficiente $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ es la **permitividad absoluta** (o permitividad) del medio y se mide en F/m .

La ecuación

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.37)$$

se denomina **ecuación constitutiva del medio**. Podemos simplificar la ecuación (2.35):

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \mathbf{D} \quad (2.38)$$

En el caso de materiales anisótropos (como los cristales), la constante dieléctrica es diferente para distintas direcciones del campo eléctrico y los vectores \mathbf{D} y \mathbf{E} tienen direcciones distintas.

2.2.3. Clasificación de los dieléctricos

Los dieléctricos pueden clasificarse atendiendo al comportamiento de la polarización en función del campo eléctrico.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}) \quad (2.39)$$

Vamos a considerar el desarrollo de McLaurin de la i -ésima coordenada del momento dipolar, considerando que P_i es una función lo suficientemente derivable.

$$P_i = P_i(0,0,0) + \sum_j \left. \frac{\partial P_i}{\partial E_j} \right|_{(0,0,0)} E_j + \sum_j \sum_k \left. \frac{\partial^2 P_i}{\partial E_j \partial E_k} \right|_{(0,0,0)} E_j E_k + \dots \quad (2.40)$$

Al no considerar medios con polarización permanente (como los ferroeléctricos o los electretes) podemos establecer que

$$P_i(0,0,0) = 0 \quad i = x, y, z \quad (2.41)$$

Para campos débiles podemos despreciar los términos de segundo orden o superiores. Suponemos en ese caso un **dieléctrico lineal** (es decir, χ y ϵ no dependen del campo electrostático). De no ser así, se trataría de un **dieléctrico no lineal** (por ejemplo, los ferroeléctricos).

Entonces, en un medio lineal:

$$P_i = \sum_j \left. \frac{\partial P_i}{\partial E_j} \right|_{(0,0,0)} E_j \quad (2.42)$$

Y procedemos ahora a definir el **tensor de susceptibilidad eléctrica** de orden 2 χ_{ij} de tal manera que:

$$\left. \frac{\partial P_i}{\partial E_j} \right|_{(0,0,0)} = \varepsilon_0 \chi_{ij} \quad (2.43)$$

el cual tendrá la siguiente forma matricial:

$$\overline{\overline{\chi_e}}(\mathbf{r}) \equiv \begin{pmatrix} \chi_{xx}(\mathbf{r}) & \chi_{xy}(\mathbf{r}) & \chi_{xz}(\mathbf{r}) \\ \chi_{yx}(\mathbf{r}) & \chi_{yy}(\mathbf{r}) & \chi_{yz}(\mathbf{r}) \\ \chi_{zx}(\mathbf{r}) & \chi_{zy}(\mathbf{r}) & \chi_{zz}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad \chi_{ij} \neq 0 \quad \text{en general} \quad (2.44)$$

Vamos a clasificar los diferentes dieléctricos lineales a partir de las características de la matriz anterior.

En el caso de que los valores de χ y ε no dependan del punto considerado el material es **homogéneo**, en caso contrario será **no homogéneo**, el tensor de susceptibilidad eléctrica es dependiente de la posición en el material. Se tiene entonces que:

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \varepsilon_0 \overline{\overline{\chi_e}} \mathbf{E} \quad (2.45)$$

Si además de **no homogéneo** el medio es **anisótropo** (los valores de χ y ε dependen de la dirección y sentido del vector \mathbf{E} en el punto) entonces el vector intensidad del campo electrostático y el vector polarización no son paralelos:

$$P_i = \varepsilon_0 (\chi_{ix} E_x + \chi_{iy} E_y + \chi_{iz} E_z) \quad \Rightarrow \quad P_i \neq \alpha E_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}, \mathbf{E} \text{ no paralelos} \quad (2.46)$$

Lo mismo ocurre para el vector desplazamiento eléctrico:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \overline{\overline{\chi_e}} \mathbf{E} = \varepsilon_0 (I_3 + \overline{\overline{\chi_e}}) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \overline{\overline{\varepsilon_r}} \mathbf{E} = \overline{\overline{\varepsilon}} \mathbf{E} \quad (2.47)$$

Y siguiendo el mismo razonamiento que antes el desplazamiento eléctrico y el campo electrostático no serían paralelos.

Supongamos que las propiedades dieléctricas del dieléctrico son independientes de la dirección de \mathbf{E} , es decir, consideremos un dieléctrico **isótropo**. En este caso:

$$\overline{\overline{\chi_e}} = \begin{pmatrix} \chi_e(\mathbf{r}) & 0 & 0 \\ 0 & \chi_e(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & 0 & \chi_e(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \chi_e(\mathbf{r}) \mathbb{I}_3 \quad (2.48)$$

Y por lo tanto, \mathbf{D} sí será paralelo a \mathbf{E} . Añadiendo la característica de que sea homogéneo tendremos que $\chi_e, \varepsilon_r, \varepsilon$ son constantes. Entonces: $\mathbf{D} = -\varepsilon \nabla \phi \Rightarrow -\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = \rho_v$:

$$\varepsilon \nabla^2 \phi + \nabla \phi \nabla \varepsilon = -\rho_v \quad (2.49)$$

Que para un medio l.h.i $\nabla \varepsilon = \mathbf{0}$ obteniendo la ecuación de Laplace.

2.2.4. Condiciones en los límites

Al estudiar distintas situaciones del campo eléctrico nos encontramos que siempre hay un espacio ocupado por un tipo de material y otro por el vacío u otro tipo de material. Los campos en distintos medios pueden ser diferentes, dependiendo de las condiciones del sistema. Interesa por tanto conocer la relación que existe entre el campo en los distintos medios, y para ello debemos saber lo que ocurre en la superficie que los limita. En realidad, no existen transiciones abruptas de un material a otro, pero en los casos en que ésta es muy rápida consideramos que la transición se verifica en la superficie de separación

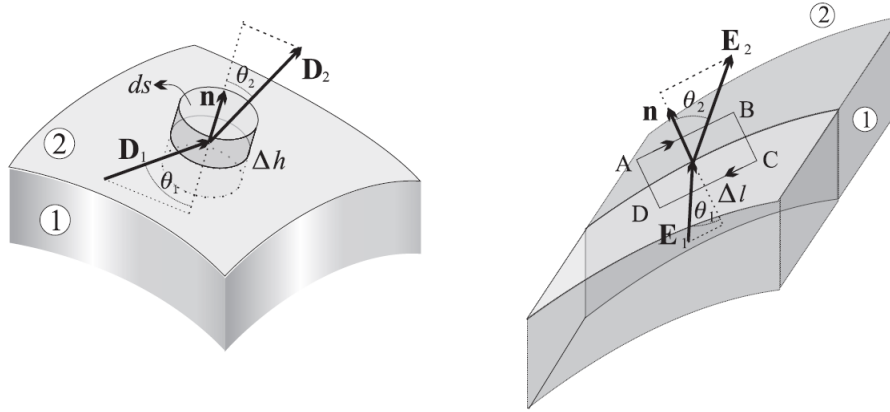


Figura 2.6: Límite entre dos dieléctricos

de los dos medios.

Potencial escalar

El potencial eléctrico entre dos puntos, cualquiera que sea el camino, por definición cumple que,

$$V_2 - V_1 = - \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{2.50}$$

Si elegimos un camino perpendicular a la superficie límite de longitud Δh y suponemos que los dos puntos están a la misma distancia de la superficie límite,

$$V_2 - V_1 = - \left(E_1 \frac{\Delta h}{2} + E_2 \frac{\Delta h}{2} \right) \tag{2.51}$$

cuando $\Delta h \rightarrow 0$, al ser el campo eléctrico finito:

$$V_2 - V_1 = 0 \tag{2.52}$$

Es decir, el potencial electrostático es continuo en la superficie de separación.

Componentes normales del vector desplazamiento

Obtenemos la relación entre las componentes normales del vector \mathbf{D} en la superficie de separación de los medios (1) y (2) diseñando una caja cilíndrica elemental situada en la superficie de separación de dos medios dieléctricos, y aplicando el teorema de Gauss para \mathbf{D} .

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \int_V \rho_V dv = \int_S \rho_S dA \tag{2.53}$$

El flujo del vector desplazamiento eléctrico se descompone en las tres caras del cilindro: la primera es el flujo a través del círculo de superficie $ds_1 = ds\mathbf{n}_1$ dicho flujo es $-\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} ds$. La segunda es el flujo a través del círculo de superficie $ds_2 = ds\mathbf{n}_2$, dicho flujo es $\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} ds$. La tercera es el flujo a través de la superficie lateral del cilindro, éste, dado que \mathbf{D} es finito en la superficie de separación, se anula cuando la altura del cilindro tiende a cero; es decir, cuando los dos círculos se aproximan a la superficie de separación. Podemos escribir entonces:

$$\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} ds - \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} ds = \rho_s ds \tag{2.54}$$

Consecuentemente:

$$D_{n2} - D_{n1} = \rho_s \tag{2.55}$$

Esta ecuación muestra que las componentes normales del vector desplazamiento son discontinuas sobre la superficie de separación entre dos medios cuando existe una densidad superficial de carga sobre ella.

Componentes tangenciales del campo electrostático

Para deducir el comportamiento de las componentes tangenciales del vector campo eléctrico \mathbf{E} en la superficie de separación de dos medios utilizamos la condición de que \mathbf{E} es un campo conservativo, es decir, que

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.56)$$

Aplicando esta condición sobre el contorno ABCD indicado en la figura cuando los tramos AD y BC tienden a cero, se deduce la ecuación para las componentes tangenciales del campo \mathbf{E} .

Sobre el tramo $AB = \Delta l$ la integral de línea es $\mathbf{E}_2 \cdot \Delta \mathbf{l}$. En el tramo $CD = \Delta l$, dado que el recorrido es en sentido contrario al anterior, la integral de líneas es $-\mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{l}$. lo largo de los tramos AD y BC, si \mathbf{E} es finito en la superficie de separación, como AD y BC tienden a cero al aproximar los lados AB y DC a la superficie de separación, la integral de línea sobre dichos tramos será nula. En definitiva la aplicación de la integral de línea a lo largo del camino cerrado ABCD queda de la forma,

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \Delta \mathbf{l} = 0 \quad (2.57)$$

Es decir:

$$E_{t2} - E_{t1} = 0 \quad (2.58)$$

Ecuación que expresa la continuidad de las componentes tangenciales del campo eléctrico en la superficie de separación entre dos medios, que es independiente de que exista carga libre sobre dicha superficie. Esta ecuación es equivalente a la que sigue:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (2.59)$$

Ejemplo: Dieléctrico no lineal entre placas conductoras

Una placa de dieléctrico no lineal de espesor d y superficie S , tiene polarización permanente uniforme $\mathbf{P} = P\hat{\mathbf{z}}$. Disponemos la placa entre dos láminas conductoras de igual superficie S unidas entre sí por un conductor como indica la figura. Despreciando efectos de borde, en función de P obtener:

1. El campo electrostático y el campo desplazamiento eléctrico en todo punto.
2. Las densidades de carga libre y ligada del sistema.

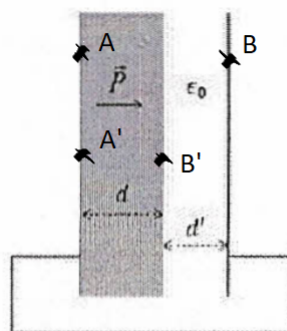


Figura 2.7: Placas conductoras conectadas con un dieléctrico no lineal entre ellas

Nuestro primer objetivo va a ser obtener una expresión para \mathbf{D} . Como suposición inicial consideremos que:

$$\mathbf{D}_i = D_i \hat{\mathbf{z}} \quad i = 1, 2$$

dado que $\mathbf{P} = P \hat{\mathbf{z}}$ aplicando (2.28) y teniendo en cuenta que en la región entre placas no hay cargas libres:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_i = \rho_v = 0 \Rightarrow \frac{dD_i}{dz} = 0 \Rightarrow D_i = cte \quad i = 1, 2$$

Solo necesitamos ver la relación que existe entre ambas constantes. Para ello empleamos la condición de frontera en el límite entre el dieléctrico y el vacío:

$$D_2 - D_1 = \rho_s = 0 \Rightarrow \boxed{D_2 = D_1}$$

Entonces ya podemos obtener una primera expresión para el campo electrostático (cuidado: al tratarse de un dieléctrico no lineal \mathbf{D} y \mathbf{E} no son proporcionales):

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \mathbf{D}_1 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 + \mathbf{P} &\Rightarrow \mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{P}}{\varepsilon_0} \\ \mathbf{D} = \mathbf{D}_2 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_2 &\Rightarrow \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Para poder poner el campo electrostático en función de \mathbf{P} aplicamos que las dos placas deben de estar al mismo potencial (forman parte del mismo conductor al estar unidas por el cable) y entonces:

$$\Delta\phi = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{P}}{\varepsilon_0} d + \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} d' = 0$$

Donde se ha aplicado que \mathbf{E} y $d\mathbf{r}$ son paralelos si seguimos una línea perpendicular a las planas y se han sustituido las expresiones antes determinadas del campo electrostático. Sin más que operar un poco:

$$D \left(\frac{d'}{\varepsilon_0} + \frac{d}{\varepsilon_0} \right) = \frac{pd}{\varepsilon_0} \Rightarrow D = \frac{pd}{d + d'}$$

y sustituyendo en las expresiones del campo:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -\frac{pd'}{(d + d')\varepsilon_0} \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{pd}{\varepsilon_0(d + d')} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Las densidades de carga se calculan como sigue. En el dieléctrico tendremos densidades de carga ligada, debidas a la polarización:

$$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$$

cosa que no debe sorprendernos puesto que sabemos que la densidad volumétrica de carga ligada viene asociada a polarizaciones no uniformes, y este no es el caso.

$$\rho_{ps} = \begin{cases} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}(A') = -\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{z}} = -P \\ \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}(B') = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{z}} = P \end{cases}$$

Las densidades de carga libre se calculan fácilmente si se tiene en cuenta que por la condición de frontera en el límite entre la placa y el exterior $\mathbf{D}_i - \mathbf{D}_{ext} = \mathbf{D}_i = \rho_s$ (al no haber campo fuera de las placas). Entonces:

$$\begin{aligned} \rho_s(A) &= \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \frac{pd}{d + d'} \\ \rho_s(B) &= -\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{z}} = -\frac{pd}{d + d'} \end{aligned} \quad (2.60)$$

2.2.5. Irrotacionalidad del desplazamiento eléctrico

Consideremos un cilindro dieléctrico con polarización uniforme en la dirección z : $\mathbf{P} = P\hat{\mathbf{x}}$, esto es, un **electreto**. Por ser el vector polarización constante sabemos que:

$$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$$

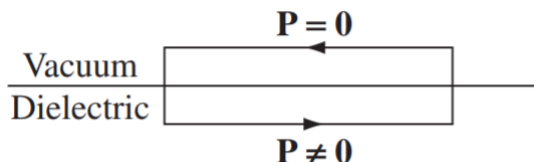


Figura 2.8: Trayectoria Γ que atraviesa la superficie lateral del dieléctrico.

Si ahora consideramos la integral de línea a lo largo de una curva Γ como la que se muestra en la figura 2.8 (son válidas otras curvas, como una circunferencia, pero creo que el razonamiento así es más sencillo) entonces claramente:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} \neq 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Th. de Stokes}} \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{P} \neq \mathbf{0}} \quad (2.61)$$

Y como $\nabla \times \mathbf{P} = \nabla \times \mathbf{D}$:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{D} \neq \mathbf{0}} \quad (2.62)$$

Ahora, si se tratase de un dieléctrico l.h.i tendríamos que $\mathbf{P} = \epsilon_0\chi_0\mathbf{E}$ de lo que se sigue que $\nabla \times \mathbf{P} = \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ por uno de los postulados fundamentales de la electrostática, entonces $\nabla \times \mathbf{D} = \mathbf{0}$, para dieléctricos l.h.i. Esto parece entrar en contradicción con lo anterior pues el electreto verifica dicha hipótesis ¡pero hemos demostrado precisamente lo contrario!

Pues bien, lo que ocurre es que sí existe una cierta dependencia entre \mathbf{P} e y , pues la definición de nuestro vector de polarización sólo es válida en una cierta región del espacio, donde se haya el cilindro. Es decir, si *salimos del cilindro* automáticamente $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, cosa que verdaderamente hemos ignorado en el párrafo anterior. Para definir \mathbf{P} realmente sería conveniente emplear la función escalón H de tal manera que $\mathbf{P} = PH\hat{\mathbf{x}}$, donde $H = 1$ si el punto se encuentra dentro del dieléctrico, y $H = 0$, fuera. Es necesario entonces especificar **que el dieléctrico llene todo el espacio** para poder afirmar que $\nabla \times \mathbf{P} = \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$.

2.2.6. Capacitancia y condensadores

Un conductor en un campo eléctrico estático es un volumen equipotencial donde las cargas depositadas se distribuyen sobre su superficie de manera que desaparezca el campo en su interior. Supongamos que el potencial debido a una carga Q (sobre el conductor) es V . Si se aumenta la carga total en un factor k , se incrementa la densidad superficial de carga ρ_s en el mismo factor en todos los puntos. De la ecuación:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_s dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.63)$$

se deduce que el potencial de un conductor aislado es directamente proporcional a su carga total. Por consiguiente, la razón Q/V no cambia:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = C \cdot V \quad (2.64)$$

La constante de proporcionalidad C se denomina **capacitancia del cuerpo conductor aislado**. Sus unidades en el sistema internacional son C/V o F . El **condensador**(o capacitor) consiste en dos conductores separados por el espacio libre o por un medio dieléctrico. La capacitancia de un condensador depende de la geometría del mismo y de la permitividad del medio.

Capítulo 3

Energía y fuerzas electrostáticas

La energía potencial debida a la interacción de cargas estáticas, recibe el nombre de **energía electrostática**. Esta energía es el trabajo necesario para situar las cargas en sus posiciones respectivas (moviéndolas lentamente desde el infinito). Dicho trabajo se hace mediante fuerzas que en cada punto son del mismo módulo y dirección pero sentido contrario al que tiene el campo electrostático. Dicho de otra manera es la **cantidad de trabajo reversible que debería realizarse por un agente externo para producir la configuración dada, en contra de las fuerzas electrostáticas conservativas entre las cargas.**

3.1. Sistemas de cargas puntuales

La energía electrostática de un sistema de cargas puntuales considera las posiciones relativas de las cargas, sin tener en cuenta la energía de creación de las propias cargas.

Si tenemos una carga q en el seno de un campo eléctrico, el trabajo del campo para trasladar la carga desde un punto a otro es:

$$W = q \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_1^2 \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = -q(\phi_2 - \phi_1) \quad (3.1)$$

El trabajo que realizan las fuerzas externas contra el campo, sin que varíe la energía cinética de la carga, es de signo contrario al obtenido anteriormente, ya que la fuerza es de signo opuesto en cada punto del recorrido. Este trabajo es la variación de energía electrostática del sistema debido al traslado de la carga desde un punto a otro.

$$W_e = q(\phi_2 - \phi_1) \quad (3.2)$$

consideramos el punto 1 situado en el infinito y el origen de potenciales en dicho punto, $\phi_1 = 0$, la energía electrostática de una carga en un punto de potencial ϕ_2 será:

$$W_e = q\phi_2 \quad (3.3)$$

En conclusión:

La energía potencial electrostática de un sistema de cargas es el trabajo necesario para situar las cargas en sus respectivos puntos. Es decir, es el trabajo necesario para trasladar las cargas situadas en puntos muy alejados unos de otros (distancias infinitas) a sus respectivos puntos.

De estas ecuaciones deducimos que la energía potencial de un sistema de cargas puntuales viene dado

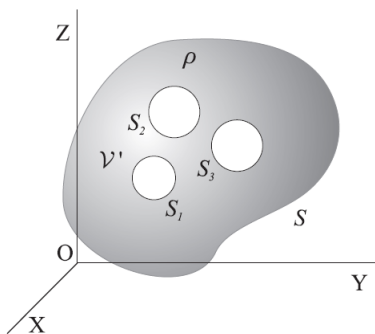


Figura 3.1: Distribución de carga continua.

por:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \quad (3.4)$$

donde el $1/2$ aparece como consecuencia de repetir los términos, pues $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. Nótese que no hay ningún motivo para que (3.4) sea positiva. Otra manera de escribir esto es:

$$W_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (3.5)$$

En la expresión (3.4) el término,

$$\phi_j = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \quad (3.6)$$

es el potencial en el punto donde se encuentra la j -ésima carga debido al resto de cargas. Podemos reescribir (3.4) como:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \phi_j q_j \quad (3.7)$$

3.2. Distribuciones continuas de cargas

Podemos generalizar la ecuación (3.4) para una distribución continua de carga, i consideramos $dq = \rho_v dv$ y tomamos el límite de la suma (cambiamos la suma por una integral):

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{v'} \phi \rho_v dv \quad (3.8)$$

La región de integración de la integral anterior puede extenderse a todo el espacio pues en las regiones en las que $\rho_v = 0$ no contribuirán en nada a la energía. Nótese además que la expresión anterior es válida tanto para una densidad de carga superficial como para una densidad de carga lineal, sin más que cambiar ρ_v por ρ_s o ρ_l , respectivamente.

3.3. Energía electrostática en función del campo

Con frecuencia interesa calcular la energía desde el punto de vista del campo electrostático creado por las cargas, es decir, se trata de poder calcular la energía en función de los vectores del campo

electrostático. Tomando la expresión (3.8) y teniendo en cuenta que $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$:

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_v \phi \rho_v dv = \frac{1}{2} \iiint_v (\nabla \cdot \mathbf{D}) \phi dv \quad (3.9)$$

Ahora empleamos la identidad vectorial: $\nabla \cdot (\mathbf{D}\phi) = V\nabla \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \nabla\phi$:

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_v \nabla \cdot (\mathbf{D}\phi) dv - \frac{1}{2} \iiint_v (\mathbf{D} \cdot \nabla\phi) dv \quad (3.10)$$

Y ahora aplicamos el teorema de la Divergencia en la primera integral $\iiint_v \nabla \cdot (\phi\mathbf{D}) dv = \iint_S (\phi\mathbf{D}) \cdot d\mathbf{s}$, y que $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ en la segunda:

$$W_e = \frac{1}{2} \iint_S \phi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{2} \iiint_v \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv \quad (3.11)$$

Puesto que V es cualquier volumen arbitrario que contenga a las cargas, podemos escoger una esfera con un radio muy grande, de manera que podremos hacer la siguiente aproximación:

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Todo el espacio}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv \quad (3.12)$$

El motivo de esta aproximación es que el potencial disminuye con la inversa de la distancia $1/R$; el vector desplazamiento eléctrico con $1/R^2$, el producto de ambos decrece con $1/R^3$; por otra parte la superficie de integración aumenta en proporción a R^2 . La consecuencia es que la integral disminuye en proporción a $1/R$ y cuando $R \rightarrow \infty$ dicha integral tiende a cero. Para un medio l.h.i. escribimos:

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Todo el espacio}} \varepsilon E^2 dv = \iiint_{\text{Todo el espacio}} w_e dv \quad (3.13)$$

donde se ha definido la **densidad de energía electrostática** como:

$$w_e \equiv \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad (3.14)$$

Nótese que a la densidad de carga electrostática se le puede sumar cualquier función f tal que $\iiint_{\text{Todo el espacio}} f dv = 0$ sin que esto afecte a la energía electrostática.

3.4. Energía de una carga puntual

El campo creado por una carga puntual es

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (3.15)$$

Si calculamos su densidad de energía electrostática por (3.14):

$$w_e \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4}$$

Calculamos la energía electrostática empleando (3.13):

$$W_e = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4} r^2 \sin^2 \theta d\theta d\phi dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty \int_0^\pi d\theta dr = \quad (3.16)$$

$$\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{1}{r} dr = \infty \quad (3.17)$$

dado que las partículas no pueden tener energía infinita tendremos que suponer que son esferas con un radio finito. Para dicha partícula la energía depende de la distribución de carga y como máximo deben de ser igual a la energía en reposo de la partícula. Aplicando la ec. (3.13), la energía necesaria para cargar una esfera de densidad de carga superficial constante, de radio r_e a carga $Q = e$ y prescindiendo del factor $1/2$ ya que el resultado de la integral depende de la distribución concreta de carga, la que desconocemos-

$$W_e \approx \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r_e} \quad (3.18)$$

Pero además su energía debe de ser igual a $W_e = m_e c^2$ considerando que está en reposo. Si igualamos ambas expresiones y despejamos r_e obtenemos:

$$r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{m_e c^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad (3.19)$$

que se conoce como el **radio clásico del electrón** y es un límite inferior para la validez del electromagnetismo clásico.

3.5. Energía electrostática almacenada en un condensador

Si consideramos un condensador formado por dos placas planas paralelas de área S y separadas una distancia d con una diferencia de potencial V , el módulo del campo electrostático vendrá dado por

$$E = \frac{V}{d} \quad (3.20)$$

Para calcular la energía electrostática empleamos la ec. (3.13):

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \iiint_{\text{Todo el espacio}} \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \iiint_v \epsilon \left(\frac{V}{d}\right)^2 dv = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{V}{d}\right)^2 \iiint_v dv = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{V}{d}\right)^2 \underbrace{S \cdot d}_{=v} = \frac{1}{2} \underbrace{\epsilon \frac{S}{d}}_{=C} (V)^2 = \\ &= \frac{1}{2} C (V)^2 \end{aligned}$$

Entonces la **energía almacenada por un condensador** viene dada por:

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2} C V^2} \quad (3.21)$$

3.6. Energía almacenada en la polarización

Cuando se añade un dieléctrico a un condensador en el espacio libre, **umentará su capacidad**. El aumento de dicha capacidad C viene dado por:

$$\boxed{C = \epsilon_r C_0} \quad (3.22)$$

El mecanismo responsable del aumento de la capacidad es la polarización. Puede demostrarse esto como sigue:

$$C \equiv \frac{Q}{V} = \frac{\rho_s A}{V} = \frac{DA}{V} = \frac{(P + \epsilon_0 E)A}{V} \quad (3.23)$$

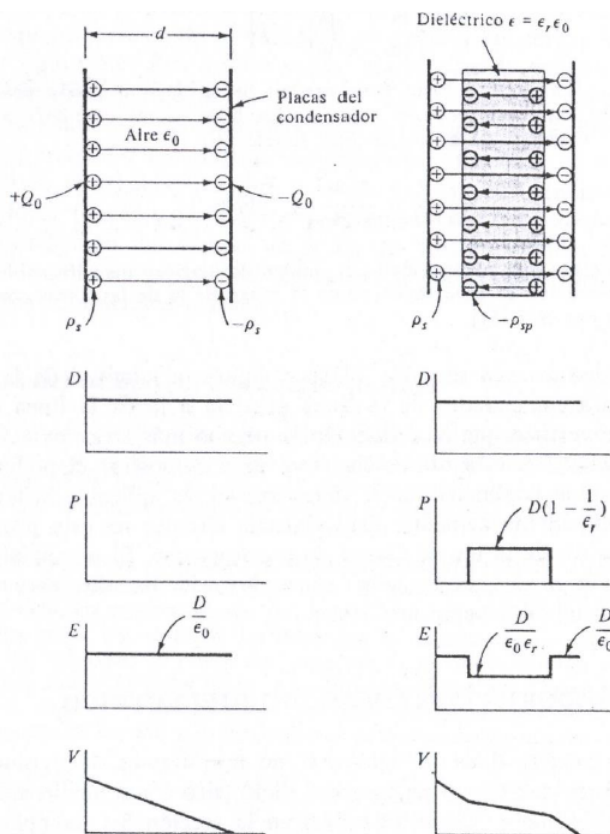


Figura 3.2: Gráfica de las principales magnitudes en el análisis de la capacidad del condensador.

Donde se ha tenido en cuenta que $D_{int} = \rho_s$ pues suponemos que el campo exterior es nulo y $D = P + \epsilon_0 E$. Si empleamos que $V = Ed$, algo válido en este contexto:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} + \frac{PA}{Ed} \tag{3.24}$$

Lo que demuestra que la capacidad C consta de dos términos: **la asociada a un condensador en el espacio libre** y otra asociada a la **polarización**. Entonces para un dieléctrico l.h.i. $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}$ y:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} + (\epsilon_r - 1) \frac{\epsilon_0 A}{d} = C_0 + (\epsilon_r - 1) C_0 = \epsilon_r C_0 \tag{3.25}$$

Como queríamos demostrar. Es importante destacar que un condensador lleno de dieléctrico **puede considerarse como dos condensadores en paralelo**, uno, un condensador en el espacio libre de capacidad C_0 , y el otro, un condensador cuya capacidad es $(\epsilon_r - 1) C_0$. Vamos a profundizar en esto analizando dos casos diferentes.

3.6.1. Q constante

Consideremos primero el caso cuando la batería deposita una cantidad de carga Q_0 en C_0 y luego esta se desconecta del condensador. Cuando se introduce un dieléctrico, las cargas libres de las placas del condensador polarizan el dieléctrico lo que conduce a una disminución del campo eléctrico entre las placas y, a su vez, a una disminución de la diferencia de potencial $V = Ed$. Entonces:

$$C = \frac{Q_0}{V} \underset{V=Ed}{=} \frac{Q_0}{Ed} \underset{D=\epsilon E}{=} \frac{Q_0}{(D/\epsilon)d} \underset{\epsilon E = \epsilon_0 E_0}{=} \frac{Q_0}{\epsilon_0 E_0 d / \epsilon} \Big|_{D=D_0} = \epsilon_r \frac{Q_0}{V_0} = \epsilon_r C_0 \tag{3.26}$$

Donde se ha tenido en cuenta la condición de contorno $D = D_0 \Rightarrow \varepsilon E = \varepsilon_0 E_0$ y que $C_0 \equiv \frac{Q_0}{V_0}$

3.6.2. V constante

Otro caso es aquel en el que la batería permanece conectada al condensador, cuando se introduce el dieléctrico. La diferencia de potencial a través del condensador, en lugar de disminuir, cuando se introduce el dieléctrico, debe ahora permanecer constante. Por tanto debe añadirse al condensador una cantidad adicional de carga, tal que la nueva capacidad sea otra vez $C = \varepsilon_r C_0$. Este aumento de carga es el siguiente:

$$Q = CV_0 = C \frac{Q_0}{C_0} \underset{C=\varepsilon_r C_0}{=} \varepsilon_r Q_0 \quad (3.27)$$

El aumento de capacidad puede demostrarse como sigue:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_s A}{V_0} \underset{\rho_s = D = \varepsilon E}{=} \frac{\varepsilon EA}{V_0} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 EA}{V_0} = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 E_0 A}{V_0} \Big|_{E=E_0} = \varepsilon_r \frac{Q_0}{V_0} = \varepsilon_r C_0 \quad (3.28)$$

Destacar que los campos eléctricos en el aire y en el dieléctrico que llena el condensador son iguales cuando la batería V_0 permanece conectada; es decir, $E_0 = E = \frac{V_0}{d}$. En este caso V permanece constante y Q aumenta al introducir el dieléctrico.

3.6.3. Consideraciones sobre la energía

La energía almacenada en el condensador es

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r C_0 V^2 = \varepsilon_r W_0 \quad (3.29)$$

La energía almacenada en un condensador lleno de dieléctrico, aumenta por el factor ε_r respecto al condensador en el espacio libre, donde hemos supuesto que la diferencia de potencial permanece constante cuando se ha colocado el dieléctrico. La energía adicional suministrada por la batería al cargar el condensador lleno de dieléctrico es por tanto la energía necesaria para polarizar el dieléctrico. Entonces, **la energía de polarización** viene dada por

$$W_{pol} = W - W_0 = (\varepsilon_r - 1) W_0 \quad (3.30)$$

Al quitar el dieléctrico, $\varepsilon_r \rightarrow 1$ y la energía de polarización tiende a cero (es devuelta al sistema).

En caso de considerar que es **la carga Q lo que se mantiene constante**:

$$C = \varepsilon_r C_0 = \frac{Q_0}{V} \Rightarrow V = \frac{Q_0}{\varepsilon_r C_0} = \frac{V_0}{\varepsilon_r} \quad (3.31)$$

Y entonces:

$$W = \frac{1}{2} Q_0 V = \frac{1}{2} \frac{Q_0 V_0}{\varepsilon_r} = \frac{W_0}{\varepsilon_r} \quad (3.32)$$

Con lo que la energía de polarización viene dada por:

$$W_{pol} = -W_0 (\varepsilon_r - 1) / \varepsilon_r \quad (3.33)$$

$$W_0 = \frac{Q^2}{2C_0} \quad (3.34)$$

La introducción del dieléctrico disminuye la energía total del sistema, a causa de que la energía para polarizar el dieléctrico puede proceder solamente del sistema, cuando todas las fuentes externas se

suponen desconectadas. A causa de que el medio dieléctrico está bajo una fuerza atractiva hacia el condensador, quitando el dieléctrico del condensador restableceremos la energía W_{pol} al sistema.

Magnitud	Diferencia de potencial constante V_0	Carga constante Q_0
Carga	$Q = \epsilon_r Q_0$	Q_0
Diferencia de potencial	V_0	$V = \frac{V_0}{\epsilon_r}$
Campo electrostático	$E_0 = E = \frac{V_0}{d}$	$E = \frac{V}{d} = \frac{V_0/\epsilon_0}{d}$
Energía almacenada	$W = \epsilon_r W_0$	$W = \frac{W_0}{\epsilon_r}$
Energía de polarización	$W_{pol} = (\epsilon_r - 1)W_0$	$W_{pol} = -\frac{W_0(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r}$
Capacidad	$C = \epsilon_r C_0$	$C = \epsilon_r C_0$

3.7. Energía de polarización desde el punto de vista del campo

Recordando la ecuación de la energía electrostática en función del campo:

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Todo el espacio}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Todo el espacio}} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{E} dv =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \iiint_{\text{Todo el espacio}} \epsilon_0 E^2 dv}_{\text{Energía almacenada en el campo eléctrico}} + \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_{\text{Todo el espacio}} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} dv}_{\text{Energía de polarización}}$$

Sustituyendo $P = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E$ y considerando v el volumen entre las placas de un condensador:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 v + \frac{1}{2} (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E^2 v \tag{3.35}$$

Como antes, si suponemos que la batería permanece conectada (V constante) cuando el medio cambia desde el espacio libre al dieléctrico, el campo eléctrico permanecerá constante durante y después del cambio; es decir, $E_0 = E = \frac{V}{d}$. La expresión anterior puede escribirse como:

$$W = \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{V}{d}\right)^2 v}_{W_0} + \frac{1}{2} (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \left(\frac{V}{d}\right)^2 v \tag{3.36}$$

Entonces podemos identificar el primer término con la energía antes de introducir el dieléctrico, pues:

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{V}{d}\right)^2 v \underset{v=sd}{=} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{V}{d}\right)^2 Sd = \frac{1}{2} \underbrace{\epsilon_0 \frac{A}{d}}_{C_0} V^2 = W_0$$

$$W_{pol} = (\epsilon_r - 1) W_0 \tag{3.37}$$

Para el caso de $Q = cte$ la energía de polarización se obtiene de manera similar. Primero calculamos la energía almacenada antes de introducir el dieléctrico aplicando (3.35)

$$W_0 = 1/2 \epsilon_0 E_0^2 v \tag{3.38}$$

Para obtener W aplicaremos la condición de frontera $\epsilon E = \epsilon_0 E_0 \Rightarrow E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$ y sustituimos en (3.35):

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{E_0^2}{\epsilon_r^2} v + \frac{1}{2} (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \frac{E_0^2}{\epsilon_r^2} v = \frac{W_0}{\epsilon_r^2} + W_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r^2} = W_0 \left(\frac{1}{\epsilon_r^2} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r^2} \right) = \frac{W_0}{\epsilon_r}$$

Entonces:

$$W_{pol} = -W_0 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \tag{3.39}$$

3.8. Fuerza entre las placas de un condensador

Las placas de un condensador cargado se atraen mutuamente, ya que una placa lleva una carga negativa, mientras que la otra la tiene positiva. Considerando un condensador en el espacio libre como se indica en la figura, debe de existir una fuerza mecánica F_m que equilibre la fuerza atractiva F_e , esto es, la fuerza que debemos ejercer para contrarrestar la fuerza electrostática. Si se permite que las placas se muevan una pequeña distancia dx , el trabajo mecánico producido por las fuerzas eléctricas es:

$$\boxed{dW_m = F_x dx} \quad (3.40)$$

De nuevo, vamos a analizar el problema en función de que magnitud se mantiene constante.

3.8.1. Q constante

Si se quita la batería después de cargar el condensador, la carga Q en las placas permanece constante cuando se permite su movimiento. Considerando un sistema aislado, se observa que si se efectúa cualquier trabajo mecánico por el sistema, la energía electrostática W_e debe disminuir. Es decir, los cambios de energía deben equilibrarse:

$$dW_m + dW_e = 0 \quad (3.41)$$

Si sustituimos en la ec.(3.40):

$$F_x = - \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_Q \quad (3.42)$$

Nótese que el signo menos en la ecuación significa que **la fuerza tiene el sentido tal que la energía almacenada disminuye**. Si recordamos $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 A} x$ (pues $V = Q/C$ y $C = \varepsilon_0 A/x$) obtenemos:

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 A} x \quad (3.43)$$

$$\boxed{F = - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}} \quad (3.44)$$

Presentamos aquí algunas conclusiones relevantes de esta sección:

- La energía almacenada disminuye cuando x disminuye.
- En un sistema aislado, con las cargas fijas, no hay fuentes externas de energía. La disminución de energía cuando las placas se mueven una distancia x se explica por el aumento de la energía mecánica $F_m dx$.
- En caso de haber un dieléctrico l.h.i. la fuerza será F/ε_r y será menor que la de un condensador en el espacio libre.

3.8.2. V constante

El sistema tiene ahora una fuente externa de energía W_b . Si las placas del condensador plano se permiten mover bajo la influencia de fuerzas eléctricas, el trabajo mecánico que se efectuará, por el sistema y las baterías, viene de nuevo por la expresión (3.40). La conservación de la energía para el caso de V constante puede expresarse como:

$$dW_m + dW_e = dW_b \quad (3.45)$$

Si las placas se acercan una distancia infinitesimal dx , la capacidad aumenta en una cantidad:

$$dC = \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{x-dx} - \frac{1}{x} \right) = \varepsilon_0 A \frac{dx}{x^2} \quad (3.46)$$

La carga adicional que se deposita es: $dQ = VdC$, entonces:

$$dW = \frac{1}{2} V dQ \quad (3.47)$$

Y la energía suministrada por la batería viene dada por:

$$dW_b = VdQ = V^2 dC = \frac{V^2 \varepsilon_0 A}{x^2} dx \quad (3.48)$$

Entonces:

$$\boxed{dW_b = 2dW} \quad (3.49)$$

La mitad de la energía suministrada por la batería aparece como un aumento de la energía eléctrica del condensador; la otra mitad se da a la energía mecánica para cambiar la capacidad de ΔC (o en mover las placas más cerca una de otra, o por la introducción de un dieléctrico con $\varepsilon_r > 1$). Podemos escribir entonces:

$$F_x = \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_V \quad (3.50)$$

Y expresar W como:

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{x} V^2 \quad (3.51)$$

Sin más que derivar:

$$\boxed{F = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{x^2} V^2} \quad (3.52)$$

El signo menos indica, de nuevo, que la fuerza sobre las placas hace que disminuya la distancia x entre las mismas. La fuerza sobre las placas aumentaría en el factor ε_r si se colocase entre las placas un dieléctrico de permitividad ε .

¿Cuales son las diferencias con el caso anterior?

- La energía $W = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{x} V^2$ aumenta en el condensador cuando las placas se acercan. Al acercarse la energía aumenta $\Delta W = \frac{1}{2} \Delta CV^2 = \frac{1}{2} \frac{V^2 \varepsilon_0 A}{x^2} \Delta x$
- Además, la batería proporciona al campo mecánico una cantidad igual de energía $F\Delta x$.
- En ambos casos, Q constante y V constante, la fuerza es tal que aumenta la capacidad del sistema.

Recomendaría consultar la sección 4.4.4 (pg. 204) de [1].

3.9. Comportamiento de los dieléctricos

El campo eléctrico de dispersión en los bordes de un condensador plano, es un campo no uniforme, que se hace más intenso al acercarse al condensador. Un objeto dieléctrico colocado en el campo de dispersión presenta cargas inducidas, ver figura. Ya que la carga inducida negativa (positiva) está más cerca de la carga positiva (negativa) de la placa del condensador que la carga inducida positiva (negativa), existe una fuerza neta sobre el objeto dieléctrico que arrastra al objeto hacia el interior del condensador. Este fenómeno atractivo existe prescindiendo de si el condensador se mantiene a un potencial fijo V (la batería permanece conectada), o a una carga constante Q (la batería carga el condensador y luego se desconecta).

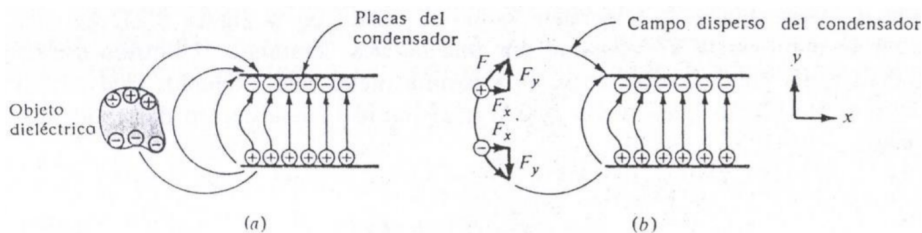


Figura 3.3: Dieléctrico cerca de un condensador plano

Supongamos que $V = cte$. En ese caso, $W = 1/2CV^2$, con lo que:

$$F_x = \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_V = \frac{1}{2}V^2 \frac{\partial C}{\partial x} \tag{3.53}$$

y actúa en el sentido de aumentar la capacidad (un objeto dieléctrico introducido en un condensador aumenta su capacidad). Podemos observar simplemente que el signo positivo en la fuerza significa que ésta actúa en el sentido de aumentar la energía almacenada, y un dieléctrico que entra en un condensador aumenta esta energía.

Por otro lado, para Q fija usamos $W = Q^2/2C$:

$$F_x = - \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_Q = - \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial x} \tag{3.54}$$

De nuevo, se muestra que la fuerza tiene el sentido de aumentar la capacidad. El signo negativo en F_x implica que la fuerza tiene el sentido en el que disminuye la energía almacenada, lo cual ocurre así pues el aumento de C disminuye W, a Q constante. Por ejemplo, para un condensador plano:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{x}$$

Entonces:

$$F_x = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial x} = - \frac{Q^2}{2Cx} = - \frac{W_e}{x}$$

Es negativa porque las placas, al tener cargas opuestas se atraen entre sí.

3.10. Presión electrostática

Si recordamos la relación $W_e = w_e v = w_e Ax$ para un condensador plano, se tendrá que:

$$F_e = -w_e A \tag{3.55}$$

considerando que éste se encuentra a carga constante. Al ser esta fuerza proporcional al área, resulta conveniente introducir una fuerza por unidad de área f_e denominada **presión electrostática**:

$$f_e \equiv \frac{|F_e|}{A} \hat{n} = w_e \hat{n} \tag{3.56}$$

Si bien es cierto que este resultado se ha obtenido para un caso particular, podemos proceder a demostrar su validez general. Sea una porción interior de un conductor, como $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ la densidad de energía será también 0. Imaginemos ahora que una pequeña porción de superficie conductora de área Δa recibe un pequeño desplazamiento Δx perpendicular a la superficie. El volumen de la región en la que la densidad de energía era cero ha sido aumentado de tal manera que

$$\Delta W_e = -w_e \Delta a \Delta x \tag{3.57}$$

Este cambio se corresponde a una fuerza ΔF_e dada por:

$$\Delta F_e = -\frac{\Delta W_e}{\Delta x} = w_e \Delta a \quad (3.58)$$

con lo que, de nuevo, podemos definir la **presión electrostática** como:

$$f_e = \frac{\Delta F_e}{\Delta a} = w_e \quad (3.59)$$

de dirección normal y hacia el exterior del conductor. Dicha magnitud se puede expresar en función del campo electrostático como:

$$f_e = w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{\rho_s^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho_s E}{2} \quad (3.60)$$

Donde E y ρ_s deben evaluarse en el punto particular de la superficie que se esté considerando. La fuerza total sobre toda la superficie del conductor se podrán obtener como:

$$\mathbf{F}_e^{\text{total}} = \iint_S f_e \mathbf{dS} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \iint_S \rho_s^2 \mathbf{dS} \quad (3.61)$$

Capítulo 4

Métodos especiales en electrostática

El principal objetivo de la electrostática es determinar el campo eléctrico de una distribución de carga dada. En principio esto consistirá en resolver la siguiente integral:

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' \quad (4.1)$$

Tal y como se vio en el Capítulo 1. Desafortunadamente las integrales de este tipo pueden ser difíciles de resolver, incluso para distribuciones relativamente sencillas. En estos casos, además de usar la Ley de Gauss, es posible calcular el potencial:

$$\phi(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (4.2)$$

y de ahí obtener el campo. Pero aún es posible que esta integral sea difícil de resolver analíticamente. Es en estos casos cuando recurriremos a la **ecuación de Poisson** (1.21) o **ecuación de Laplace** (1.22), deducidas en el Capítulo 1. El problema consistirá ahora en resolver una ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales.

4.1. Unicidad de la solución de Laplace

Se demostrará que si se ha encontrado una solución a la ecuación de Laplace que satisface las condiciones de frontera dadas, esta solución es única.

Suponemos que se está tratando con una región rodeada por una superficie para la que el valor numérico del potencial se encuentra dado o conocido en todos sus puntos. Esto implica que no se conocen los detalles de la distribución de cargas fuente fuera de esta región, pero si se conocen el potencial que ellas producen sobre la superficie.

Teorema 4.1.1. (*Primer teorema de unicidad*) *La solución de la ecuación de Laplace*

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0} \quad (4.3)$$

en un volumen v está únicamente determinada si el potencial escalar ϕ está determinado en toda la superficie frontera S que rodea a v .

Demostración. Sean $\phi_1 = \phi_1(\mathbf{r}), \phi_2 = \phi_2(\mathbf{r})$ dos soluciones de la ecuación de Laplace y definamos $\phi = \phi_1 - \phi_2$ con lo que $\nabla^2 \phi = \nabla^2 \phi_1 - \nabla^2 \phi_2 = 0$ por ser ϕ_1, ϕ_2 soluciones de la ecuación, esto último implica que ϕ también es solución.

En la frontera S se tendrá que $\phi_1 = \phi_2$ entonces $\phi = 0$ en S . Si empleamos la identidad vectorial $\nabla(u\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla u) + u(\nabla\mathbf{A})$:

$$\nabla(\phi\nabla\phi) = \nabla\phi \cdot \nabla\phi + \underbrace{\phi\nabla^2\phi}_{=0 \text{ pues } \nabla^2\phi=0} = (\nabla\phi)^2 \quad (4.4)$$

Por el Teorema de la Divergencia:

$$\iiint_V (\nabla\phi)^2 dv = \iiint_V \nabla(\phi\nabla\phi) dv = \iint_S (\phi\nabla\phi) d\mathbf{s} = 0 \quad (4.5)$$

al tener en cuenta que $\phi = 0$ en la frontera. Al ser la primera integral una suma de cuadrados, la integral será nula si el integrando lo es, entonces:

$$(\nabla\phi)^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 = 0 \quad (4.6)$$

que también es una suma de cuadrados, entonces $\phi(x, y, z) = cte$. Pero $\phi = 0$ en la superficie, entonces $\phi = 0$ en general, con lo que $\phi_1 = \phi_2$ en todo el espacio considerado. QED

Corolario 4.1.1.1. *El potencial en un volumen v está únicamente determinado si lo están la densidad de carga en la región y el valor del potencial en todas las fronteras.*

Este teorema es una poderosa herramienta, pues no importa como se haya calculado el potencial, si satisface la ecuación de Laplace y tiene el valor correcto en las fronteras, es el potencial que buscamos.

4.2. Método de las imágenes

La Ley de Coulomb fue la base para obtener la expresión del potencial (1.4), es decir, para el potencial de un sistema de cargas. Dicha expresión debe satisfacer la ecuación de Laplace, es decir, la suma de los potenciales individuales de un conjunto de cargas **es automáticamente una solución de la ecuación de Laplace**. Este hecho es la base del **método de las imágenes**.

Nuestro objetivo será encontrar un conjunto de cargas *ficticias* (cargas imagen) las que, junto con cualesquiera cargas reales harán satisfacer las condiciones de frontera y así obtener la función única del potencial. Es decir, se intenta escribir el potencial como:

$$\phi = \sum_{\text{Real}} \frac{q_r}{4\pi\epsilon_0 R_r} + \sum_{\text{Imagen}} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i} \quad (4.7)$$

y encontrar la mejor combinación posible. Las cargas imagen simularán de alguna manera el comportamiento de las otras cargas fuente o del material presente. Las cargas imagen se situarán fuera de la región para la que se está tratando de calcular ϕ . En resumen:

1. **Analizar el problema:** Establecer las condiciones de frontera. Intentar intuir qué cargas imagen parecen necesarias.
2. **Plantear el potencial:** Escribir una expresión del potencial para el sistema con las cargas que satisfaga las condiciones de contorno y la ecuación de Laplace. Si hay parámetros por determinar, fijarlos mediante la imposición de las condiciones de contorno.
3. **Verificar / Cálculos adicionales:** Si hemos obtenido un potencial tal que verifica las mismas condiciones de contorno que el problema original, este es el potencial que buscamos. Podemos a partir de éste, obtener el campo electrostático u otras magnitudes que necesitemos.

Es interesante tener en cuenta que podemos referirnos al problema con las cargas imágenes siempre que queramos, para calcular magnitudes que serían más difíciles de calcular en la situación original.

Por ejemplo, el flujo en una cierta región es el mismo en ambos problemas (por ser el mismo campo electrostático), con lo que la carga en el interior de la superficie gaussiana será igual para las dos situaciones. Ahora, en el panorama original acostumbraremos a tratar con regiones con densidades de carga no uniformes, tales como planos, esferas... ¡pero en el problema con cargas imágenes solo hay cargas puntuales!, con lo que podremos obtener de manera mucho más sencilla la carga en la región antes mencionada. Esto se aplica también a la fuerza electrostática, por ejemplo.

4.2.1. Ejemplos de aplicación del método de las imágenes

Ejemplo: Carga puntual y plano conductor semi-infinito conectado a tierra

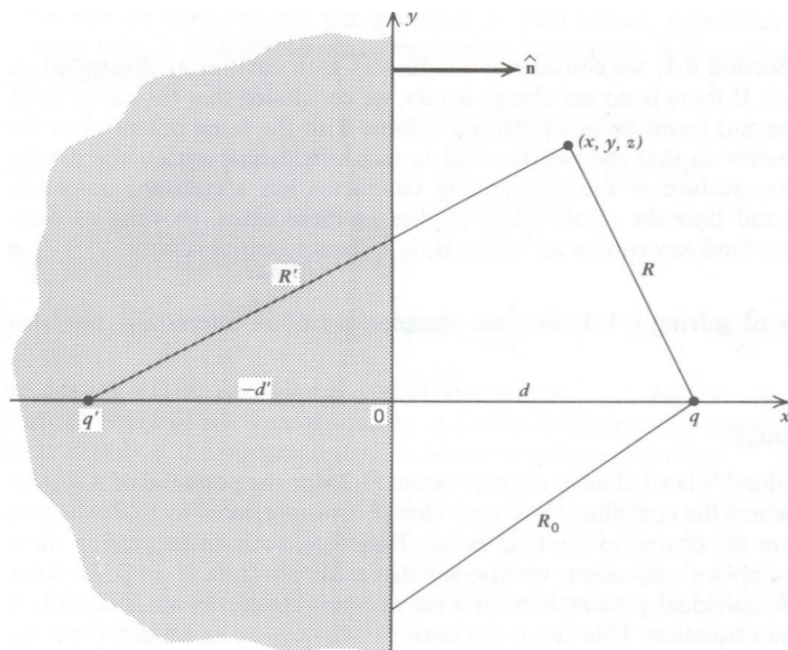


Figura 4.1: Carga puntual y plano conductor semi-infinito conectado a tierra

Desde un punto de vista matemático nuestro problema consiste en resolver la ecuación de Poisson para $x > 0$ con una carga puntual en $(d, 0, 0)$ sometida a las siguientes condiciones de frontera:

- $\phi(0, y, z) = 0$ pues el plano está conectado a tierra.
- $\phi \rightarrow 0$ muy lejos de la carga, esto es, para $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$.

El Corolario del primer Teorema de Unicidad nos garantiza que existe una única función que cumple las mencionadas características.

El *truco* del método de las imágenes consiste en estudiar una situación completamente diferente (pero mucho más sencilla): dos cargas q, q' en $x = d, x = -d'$ respectivamente. Entonces la expresión del potencial viene dada por:

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{((x-d)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{q'}{((x+d')^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right] \quad (4.8)$$

Por la primera condición de frontera:

$$\frac{q}{(d^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{q'}{(d'^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = 0$$

De lo que se deduce que: $q = q'$ y $d = d'$. Tenemos entonces un potencial de la forma:

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{((x-d)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{((x+d)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right] \quad (4.9)$$

¡Pero este es un potencial que verifica las condiciones de frontera del problema original! Entonces por el Teorema de Unicidad (o por su Corolario) el potencial del problema original para $z > 0$ es precisamente el de la ecuación (4.9).

Los valores de la intensidad del campo electrostático vienen dados por:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(x-d)}{((x-d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{(x+d)}{((x+d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\} \\ E_y &= -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{qy}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{((x-d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x+d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\} \\ E_z &= -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{((x-d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x+d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\} \end{aligned}$$

Nótese que $E_y(0, y, z) = E_z(0, y, z) = 0$, es decir, que en el plano el campo solo tiene componente normal al plano. Entonces:

$$E_n = \mathbf{E} \cdot \hat{n} = \hat{x} \cdot \mathbf{E} = E_x(0, y, z) = \frac{-qd}{2\pi\epsilon_0 (d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{-qd}{2\pi\epsilon_0 R_0^3}$$

Empleando la expresión para el campo creado en la superficie de un conductor:

$$E_{\text{superficial}} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho_s(y, z) = \frac{-qd}{2\pi (d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Esta carga superficial fue inducida por la carga puntual q . La carga total inducida sobre el plano YZ:

$$dq_{\text{ind}} = \rho_s(y, z) \cdot ds \Rightarrow q_{\text{ind}} = \frac{-qd}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy \cdot dz}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{-qd}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{d^2 + z^2} = -q \quad (4.10)$$

Y la fuerza que sufre la carga q :

$$\mathbf{F} = qE_x(d, 0, 0)\hat{x} = \frac{-q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \hat{x} \quad (4.11)$$

nótese que ésta es la fuerza que causaría sobre ella la carga imagen. Las superficies equipotenciales vendrían dadas por:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = \frac{4\pi\epsilon_0\phi}{q} = \text{constante} \quad (4.12)$$

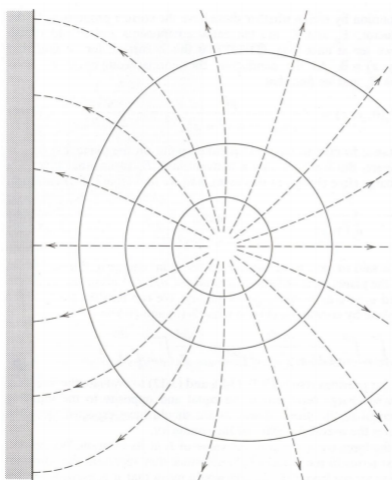


Figura 4.2: Líneas de campo de carga puntual y plano conductor semi-infinito conectado a tierra

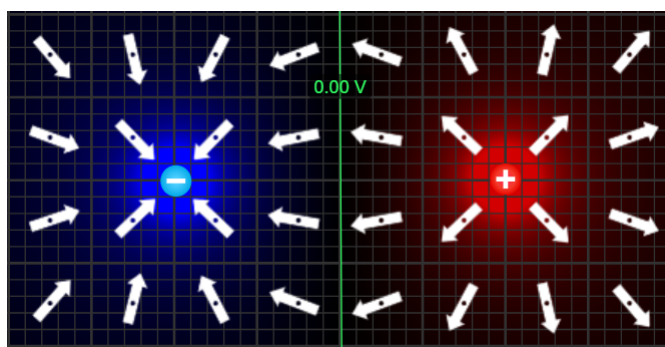


Figura 4.3: Problema equivalente al de la carga puntual y el plano conectado a tierra empleando una carga imagen.

Es interesante mencionar el caso de que en vez de una carga puntual tengamos un dipolo. En este caso podemos aplicar lo ya visto a ambas cargas por separado, es decir:

- Si el momento dipolar apunta perpendicularmente al plano, el *dipolo imagen* apuntará en el mismo sentido que el dipolo real.
- Si el momento dipolar apunta paralelamente al plano, el *dipolo imagen* apuntará en sentido opuesto al dipolo real.
- El resto de casos se harán como superposición de estos dos.

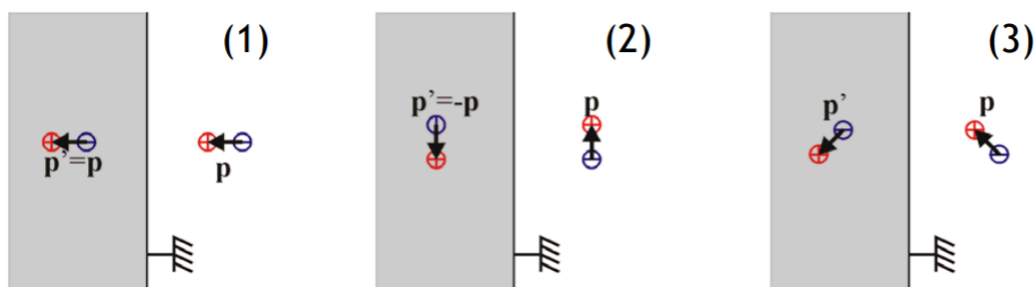


Figura 4.4: Método de las imágenes para un dipolo y un plano semi-infinito.

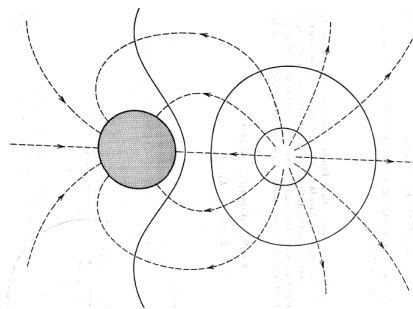


Figura 4.6: Líneas de campo de carga puntual y esfera conductora conectado a tierra

Ejemplo: Carga puntual y esfera conductora en diversas situaciones

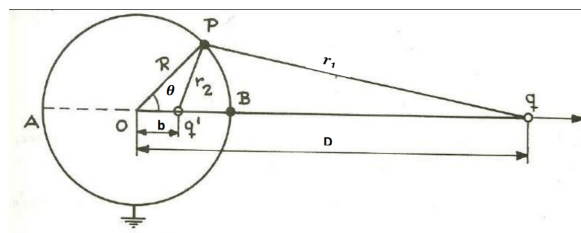


Figura 4.5: Carga puntual y esfera conductora conectada a tierra

Consideremos el siguiente problema: determinar el campo electrostático creado por una esfera conductora conectada a tierra y una carga puntual q situada a una distancia D del centro de ésta. Nuestra carga imagen será una carga q' a una distancia b del centro de la esfera.

El potencial creado por estas dos cargas es:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} \right)$$

Y las condiciones de contorno son $\phi(A) = \phi(B) = 0$. Es decir:

$$\phi(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{D+R} + \frac{q'}{R+b} \right] = 0 \Rightarrow \frac{R+b}{D+R} = -\frac{q'}{q}$$

$$\phi(B) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{D-R} + \frac{q'}{R-b} \right] = 0 \Rightarrow \frac{R-b}{D-R} = -\frac{q'}{q}$$

Entonces:

$$\frac{R+b}{D+R} = \frac{R-b}{D-R} \Rightarrow 2bD = 2R^2 \Rightarrow b = \frac{R^2}{D}$$

Sustituyendo b en cualquiera de las relaciones anteriores obtenemos q' :

$$q' = -q \frac{R}{D}$$

Con esto, si sustituimos en el potencial y aplicamos el teorema del coseno a r_1, r_2 :

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta}} - \frac{R/D}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{D^2} - \frac{2rR^2}{D} \cos \theta}} \right]$$

Pongamos ahora un problema un poco más complicado. Consideremos ahora que la esfera no está a tierra, sino a un potencial V_0 . Consideremos primero *cuantos problemas hay en nuestro problema*.

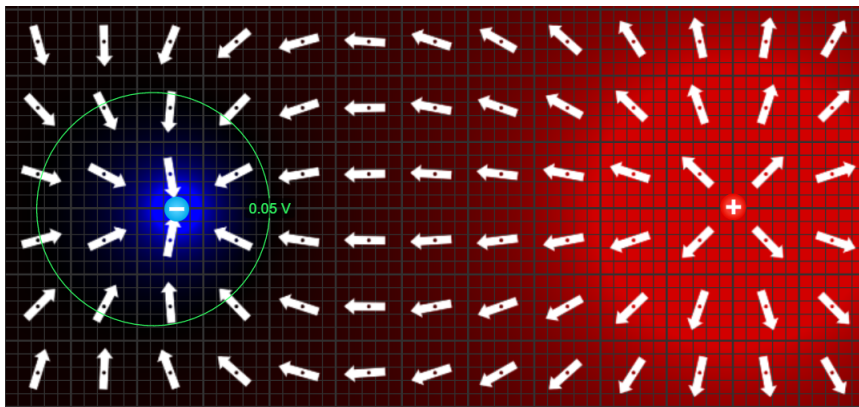


Figura 4.7: Problema equivalente al de la carga puntual y la esfera conectada a tierra empleando una carga imagen.

Podemos apreciar que hay dos: la esfera a tierra (el que acabamos de resolver) con la carga puntual y la esfera a potencial V_0 sin la carga. La solución a este problema es conocida:

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \begin{cases} V_0 & (r < R) \\ \frac{V_0 R}{r} & (r > R) \end{cases} = \begin{cases} \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 R} & (r < R) \\ \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} & (r > R) \end{cases}$$

donde $q'' = 4\pi\epsilon_0 R V_0$.

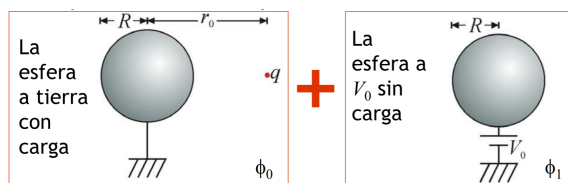


Figura 4.8

Entonces el problema general se resuelve de la siguiente manera: situando una carga imagen $q' = -QR/D$ en $\mathbf{r}'_0 = R^2/D$ como antes (consiguiendo que el potencial en $r = R$ sea 0) y colocando una carga $q'' = 4\pi\epsilon_0 R V_0$ en el centro de la esfera de tal manera que entonces el potencial en $r = R$ sea V_0 . Como se verifican las condiciones de frontera mencionadas obtenemos el potencial a partir del problema con cargas puntuales:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0|} + \frac{q''}{r} \right) \quad r > R$$

y para $r < R$ el potencial debe ser $V_0 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 R}$.

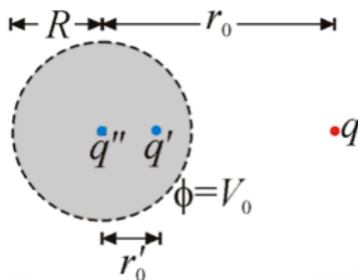


Figura 4.9

Es interesante mencionar que la fuerza sobre la carga q coincide con la fuerza que ejercen sobre ésta las dos cargas imagen, que es sencilla de calcular por la Ley de Coulomb. Igualmente,

mediante la aplicación de la Ley de Gauss podemos determinar la carga en la esfera:

$$Q_{int} = \epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q' + q'' = -q \frac{R}{r_0} + 4\pi\epsilon_0 R V_0$$

nótese que este cálculo puede hacerse de esta manera no porque haya dos cargas dentro de la esfera, sino porque el campo (y por lo tanto, el flujo) es el mismo para ambas situaciones problema original / cargas imagen, con lo que la carga inducida coincidirá también.

Por último analizaremos una tercera versión de este problema que se reduce al anterior. En este caso, la esfera, en vez de tener fijado su potencial, nos es dada su carga Q . Imaginando la misma situación que antes establecemos que la carga Q determinará un potencial V_0 (que desconocemos) en la esfera:

$$Q = q' + q'' = -q \frac{R}{r_0} + 4\pi\epsilon_0 R V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_0} + \frac{Q}{R} \right)$$

con lo que reducimos el problema a un caso particular de la situación anterior donde $V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_0} + \frac{Q}{R} \right)$. Este método resuelve de manera automática el problema 7 del boletín 6.

Estas técnicas son aplicables al caso de una esfera y una cierta distribución continua de carga. En estos casos conviene hallar la imagen de cada elemento diferencial de carga dq y predecir la distribución imagen que va a resultar. Pueden verse dos ejemplos en la figura 4.10.



Figura 4.10: Método de las imágenes para dos distribuciones continuas diferentes y una esfera.

Ejemplo: Carga puntual y dos planos conductores conectados a tierra

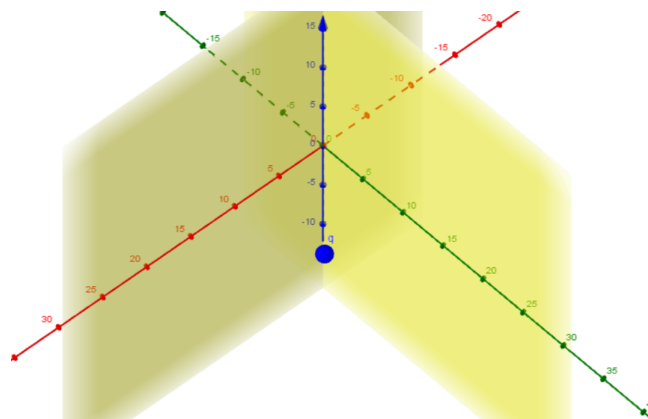


Figura 4.11: Carga puntual y dos planos conductores conectados a tierra

De nuevo, buscamos un potencial ϕ que verifique las condiciones de frontera del problema original

(figura 4.11) que son $\phi(0, y, z) = \phi(x, 0, z) = 0$. La pregunta clave es qué conjunto de cargas imagen crean un potencial con esas características. Considerando únicamente la carga q , podemos hacer el siguiente razonamiento (puede resultar un poco lioso, pero me parece útil):

- Para que el potencial se anule en $x = 0$ podemos situar una carga imagen $q'_A = -q$ en $(-a, b, 0)$. La distancia entre el plano $x = 0$ y esta carga será siempre la misma que entre dicho plano y la carga original.
- Podemos hacer el mismo razonamiento para $y = 0$ colocando una carga imagen $q'_B = -q$ en $(a, -b, 0)$.
- Ahora bien, las dos cargas imágenes *arruinan* nuestro razonamiento anterior al introducir una contribución adicional al potencial. Para compensar esto colocamos otra carga imagen en $(-a, -b, 0)$ $q'' = q$.

Como:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_q = (x - a, y - b, z) \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_{q'_A} = (x + a, y - b, z) \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_{q'_B} = (x - a, y + b, z) \\ \mathbf{r}_4 &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_{q''} = (x - a, y - b, z)\end{aligned}$$

Entonces el potencial que verifica la condiciones de frontera es:

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2}} \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2}}\end{aligned}$$

y el campo electrostático viene dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q [(x-a)\hat{\mathbf{x}} + (y-b)\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}]}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q [(x+a)\hat{\mathbf{x}} + (y+b)\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}]}{[(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2]^{3/2}} \\ &- \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q [(x+a)\hat{\mathbf{x}} + (y-b)\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}]}{[(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q [(x-a)\hat{\mathbf{x}} + (y+b)\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}]}{[(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2]^{3/2}}\end{aligned}$$

La densidad superficial de carga en cada plano se puede calcular atendiendo a la ecuación:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} \Rightarrow \rho_s = \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (4.13)$$

Para el plano $y = 0$, $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}}$ entonces:

$$\rho_s(y = 0) = \frac{1}{4\pi} \frac{-2bq}{[(x-a)^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{1}{4\pi} \frac{2bq}{[(x+a)^2 + (b)^2 + z^2]^{3/2}}$$

Por otro lado, para $x = 0$, $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$:

$$\rho_s(x = 0) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{-2qa}{[a^2 + (y-b)^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{2qa}{[a^2 + (y+b)^2 + z^2]^{3/2}} \right]$$

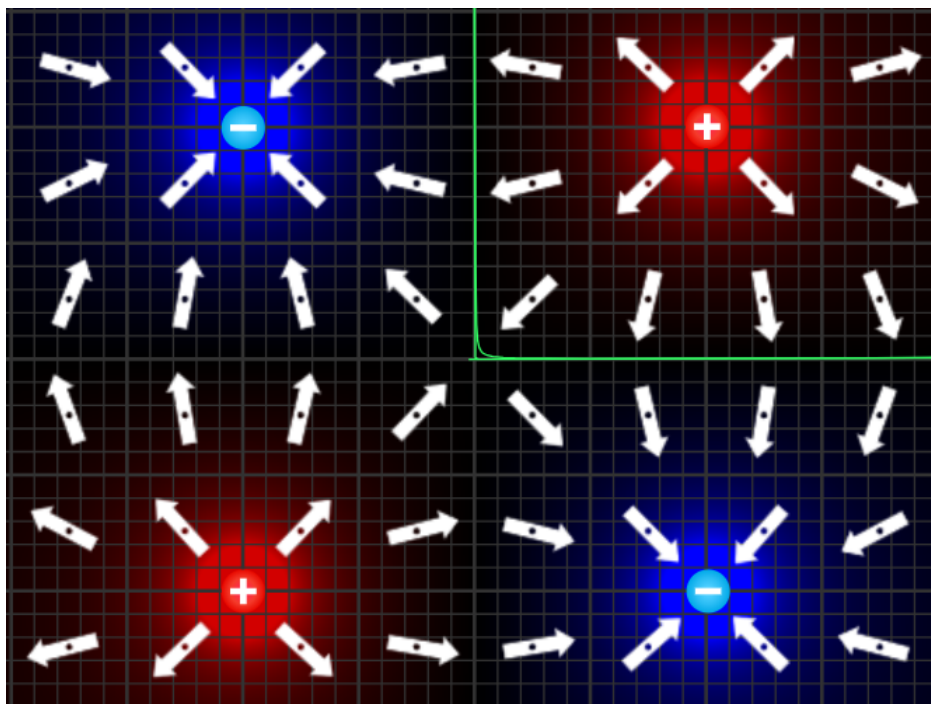


Figura 4.12: El sistema de cargas puntuales equivalente a los dos planos (representación en dos dimensiones). Nótese que efectivamente la línea equipotencial $\phi = 0$ coincide con la del problema original, las condiciones de frontera son la mismas.

Ejemplo: Carga puntual en el interior de una corteza esférica

Sea una carga q en el interior de una corteza esférica tal y como se muestra en la imagen 4.13. Determine, para el caso de la corteza conectada a tierra, para el caso de la corteza descargada y aislada y para el caso de la corteza con carga dada Q :

- Campo y potencial en todo el espacio.
- Fuerza sobre la carga q . Analizar si es atractiva o repulsiva.
- Carga inducida sobre la corteza esférica.

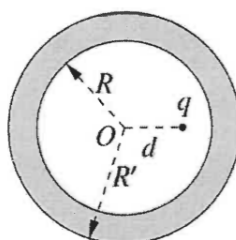


Figura 4.13

Caso 1: Corteza a tierra. Determinamos en primer lugar el potencial y el campo en todo punto del espacio. De nuevo, se trata de un problema dividido en dos problemas claramente diferenciados en el problema exterior a la corteza y el interior a la corteza.

En primer lugar, claramente $\phi(r) = 0, \mathbf{E}(r) = \mathbf{0}$ si $r \geq R$, pues en la corteza ha de ser cero por estar conectada a tierra, y en el resto del espacio ha de ser cero al no haber otras cargas fuera y estar la

corteza a mismo potencial que el infinito (y no podrá haber ninguna línea de campo, pues éstas van de zonas de mayor a menor potencial).

Ahora, si $r \leq R$ nos encontramos ante un problema diferente, resoluble mediante el método de las imágenes: una carga q y una condición de frontera $\phi(R) = 0$. Tal y como se ha visto anteriormente esto se soluciona mediante una carga imagen $q' = -q \frac{R}{d}$ a una distancia $b = \frac{R^2}{d}$ de la esfera. Entonces:

$$\phi_{int} = \phi_q + \phi_{q'} + \underbrace{V}_{=0} \quad (4.14)$$

donde V sería diferente de cero si en vez de estar conectada a tierra estuviese conectada a un potencial V . Para obtener el campo electrostático hacemos el gradiente:

$$\mathbf{E}_{int} = \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_{q'} \quad (4.15)$$

La ventaja del método de las imágenes es que ahora solo tenemos que trabajar con campos creados por cargas puntuales. Para calcular la fuerza sobre q aplicamos la Ley de Coulomb:

$$\mathbf{F}_q = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^2/d - d^2)^2} \hat{\mathbf{R}} = \frac{q^2 R d}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^2 - d^2)^2} \hat{\mathbf{x}} \quad (4.16)$$

Con lo que la fuerza será atractiva. Por otro lado para obtener la carga inducida sobre la superficie interior aplicamos la Ley de Gauss:

$$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q + q_{ind}}{\epsilon_0} \quad (4.17)$$

sobre una superficie gaussiana esférica en la corteza. Al tratarse de un conductor en equilibrio electrostático el campo es cero con lo que:

$$q_{ind} = -q \quad (4.18)$$

Supongamos ahora que la corteza inicialmente estaba aislada y descargada. De nuevo, consideraremos el problema exterior y el interior. Para el caso exterior tenemos en cuenta que la carga q inducirá una carga $-q$ en la superficie interior, y como consecuencia de esto aparecerá una carga q en la superficie exterior. Entonces para $r \geq R'$:

$$\phi_{ext} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{E}_{ext} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (4.20)$$

En concreto, en todo la corteza esférica se tendrá un potencial $\phi(R') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R'}$. Aplicando lo visto en el apartado anterior pero ahora con $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R'}$ tenemos que:

$$\phi_{int} = \phi_q + \phi_{q'} + V = \phi_q + \phi_{q'} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R'} \quad (4.21)$$

apreciando que así, se verifica la condición de frontera $\phi(R') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R'}$. De esta manera se ve que:

$$\mathbf{E}_{int} = \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_{q'} \quad (4.22)$$

es decir, que el campo (y por lo tanto, la fuerza) es el mismo que en el caso anterior.

Si la corteza esférica tuviese una carga Q el planteamiento sería idéntico, pero en esta ocasión

$$\phi_{ext} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q + Q}{r} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{E}_{ext} = \frac{q + Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (4.24)$$

Entonces $\phi(R') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q+Q}{R'} = V$ en este caso. El campo sería igual a los dos anteriores.

4.3. Solución de la ecuación de Laplace

En esta sección analizaremos la solución de problemas electrostáticos empleando la ecuación de Laplace, es decir, imponiendo a la ecuación de Laplace ciertas condiciones de frontera y calculando a partir de ésta una expresión del potencial. Para ello analizaremos las soluciones generales de ésta ecuación con respecto a diferentes sistemas de coordenadas, empleando el método de separación de variables.

4.3.1. Coordenadas rectangulares

La ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas es de la forma:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0} \quad (4.25)$$

Si esta ecuación admite una solución de la forma $\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ entonces podremos escribir:

$$Y(y)Z(z)\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x)Z(z)\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + Y(y)Z(z)\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0 \quad (4.26)$$

Y dividiendo entre $X(x)Y(y)Z(z)$ resulta:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0 \quad (4.27)$$

Cada término de la ecuación anterior depende únicamente de una variable, por otra parte la suma de los tres términos es cero, en consecuencia cada término debe ser una constante de modo que la suma sea nula para cualquier valor de x, y, z . Atendiendo a estas consideraciones podemos descomponer la ecuación anterior en las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} &= \alpha^2 \\ \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} &= \beta^2 \\ \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} &= \gamma^2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

que verificarán:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \quad (4.29)$$

Las soluciones de (4.28) son:

$$\begin{aligned} X(x) &= a_1 e^{\alpha x} + a_2 e^{-\alpha x} \\ Y(y) &= b_1 e^{\beta y} + b_2 e^{-\beta y} \\ Z(z) &= c_1 e^{\gamma z} + c_2 e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (4.30)$$

El producto de estas tres funciones será una solución de la ecuación de Laplace, siempre que se verifique (4.29). Claramente entonces no es posible que todas las constantes sean reales (o todas imaginarias), con lo que **al menos una de las funciones variará exponencialmente con su argumento y al menos una variará sinusoidalmente**. En conclusión, la solución general será una suma de todas las funciones

que verifiquen las condiciones mencionadas:

$$\phi(x, y, z) = \sum_{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0} \{a_1(\alpha)e^{\alpha x} + a_2(\alpha)e^{-\alpha x}\} \cdot \{b_1(\beta)e^{\beta y} + b_2(\beta)e^{-\beta y}\} \cdot \{c_1(\gamma)e^{\gamma z} + c_2(-\gamma)e^{-\gamma z}\} \quad (4.31)$$

4.4. Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas serán útiles a la hora de resolver problemas con, valga la redundancia, simetría esférica, tales como coronas esféricas. Vamos a suponer que no existe dependencia con φ es decir $\phi = \phi(r, \theta)$. Entonces la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas podrá escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (4.32)$$

Aplicando separación de variables $\phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ y dividiendo entre ϕ :

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) = 0 \quad (4.33)$$

De nuevo, ambos términos deben de ser constantes tales que su suma sea 0.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) &= k \\ \frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) &= -k \end{aligned} \quad (4.34)$$

La primera de estas ecuaciones es relativamente sencilla. Para resolverla planteamos una solución tipo $R = r^l$ resultando que $k = l(l+1)$. Escribiremos a partir de ahora R_l, Θ_l para representar la solución para cada l . Entonces la segunda ecuación queda como:

$$\frac{1}{\Theta_l(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta_l(\theta)}{d\theta} \right) = -l(l+1) \quad (4.35)$$

Se puede demostrar que para que Θ sea una solución *razonable* (es decir, finita, univaluada y continua, algo acorde con su significado físico) l debe de ser un entero positivo $l = 0, 1, 2, \dots$. La solución de la segunda ecuación diferencial son los **polinomios de Legendre** en la variable $\cos \theta$:

$$\Theta_l(\theta) = P_l(\cos \theta) \quad (4.36)$$

Estos polinomios pueden ser calculados mediante la **fórmula de Rodrigues**:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} \left((x^2 - 1)^l \right) \quad (4.37)$$

Regresando a la primera ecuación, si sustituimos una solución del tipo r^n :

$$-l(l+1) + r + r^2 = 0 \Rightarrow -(-r+l)(r+l+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} r = l \\ r = -(l+1) \end{cases}$$

Entonces:

$$R_l(r) = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \quad (4.38)$$

$P_0(x)$	1
$P_1(x)$	x
$P_2(x)$	$\frac{3x^2-1}{2}$
$P_3(x)$	$\frac{5x^3-3x}{2}$
$P_4(x)$	$\frac{35x^4-30x^2+3}{8}$
$P_5(x)$	$\frac{63x^5-70x^3+15x}{8}$

Tabla 4.1: Algunos polinomios de Legendre en la variable x

y la solución de la ecuación de Laplace para una situación axialmente simétrica es:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \tag{4.39}$$

Una propiedad muy interesante de los polinomios de Legendre es la de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \tag{4.40}$$

y para $x = \cos \theta$:

$$\int_0^\pi P_m(\cos \theta)P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \tag{4.41}$$

4.4.1. Ejemplos

Esfera conectada a tierra en un campo electrostático uniforme.

Sea una esfera conductora de radio R conectada a tierra situada en una región en la que hay presente un campo electrostático uniforme $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{z}}$. Obtener el potencial y la densidad de carga superficial inducida.

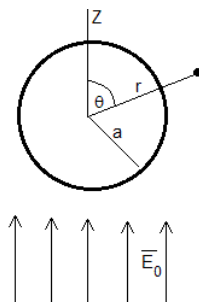


Figura 4.14

Las condiciones de frontera son las que siguen. Para $r = R$:

$$\phi(R, \theta) = 0 \tag{4.42}$$

por estar conectada a tierra. Por otro lado, para $r \gg R$:

$$\phi = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -E_0z = -E_0r \cos \theta \tag{4.43}$$

Considerando la ecuación (4.39) y la primera de las condiciones de frontera:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n R^n + \frac{B_n}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) = 0 \quad (4.44)$$

Dado que ninguno de los polinomios de Legendre es cero, y que no se puede hacer ninguna combinación lineal que se sume a cero, el término entre paréntesis debe ser cero para toda n :

$$\left(A_n R^n + \frac{B_n}{R^{n+1}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_n = -A_n R^{2n+1} \quad (4.45)$$

Sustituyendo esta relación en (4.39):

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n - \frac{A_n R^{2n+1}}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(r^n - \frac{R^{2n+1}}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (4.46)$$

Ahora, por la segunda condición de frontera:

$$\phi(r \gg R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(r^n - \frac{R^{2n+1}}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta \quad (4.47)$$

Podemos despreciar el segundo término dentro del paréntesis, con lo que:

$$\phi(r \gg R, \theta) \approx \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta \quad (4.48)$$

Dado que el segundo polinomio de Legendre es $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, identificamos el lado derecho de la expresión anterior como $P_1(\cos \theta)$ multiplicado por r y una constante. En otras palabras, los coeficientes A_n del lado izquierdo son todos cero excepto para $n = 1$.

$$\phi(r \gg R, \theta) \approx A_1 r^1 P_1(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta \Rightarrow A_1 = -E_0 \quad (4.49)$$

Sustituyendo en la expresión general:

$$\phi(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta \quad (4.50)$$

Procedemos ahora a obtener el campo electrostático: $\mathbf{E} = -\nabla\phi$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(r, \theta) = \left[E_0 \left(1 + 2\frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[-E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.51)$$

Entonces:

$$\rho_s = \varepsilon_0 E_r(R) = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (4.52)$$

Esfera conductora con densidad superficial de carga dada

Spongamos una esfera conductora con densidad superficial de carga $\rho_s(\theta) = k \cos \theta$. Determine el potencial en todo el punto del espacio.

Si partimos de la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas (4.39) apreciamos que:

$$\phi_{int} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad r \leq R$$

$$\phi_{ext} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad r \geq R$$

Donde los coeficientes A_l, B_l se han anulado en respectivamente la segunda y la primera expresión para que el potencial no diverga en el centro de la esfera e infinito, respectivamente. Apliquemos las condiciones que deberá verificar el potencial. La primera de ellas es la continuidad en $r = R$, es decir:

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

que implica que:

$$B_l = A_l R^{l+2}$$

Además podemos aplicar la discontinuidad de las derivadas del potencial con respecto a la dirección normal a la superficie, en este caso la radial, consecuencia de la discontinuidad del campo electrostático:

$$\left(\frac{\partial \phi_{ext}}{\partial r} - \frac{\partial \phi_{int}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = -\frac{\rho_s(\theta)}{\epsilon_0}$$

Entonces:

$$-\sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^l P_l(\cos \theta) = -\frac{\rho_s(\theta)}{\epsilon_0}$$

Sustituyendo $B_l = A_l R^{l+2}$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = \frac{\rho_s(\theta)}{\epsilon_0}$$

Y aplicando la ortogonalidad de los polinomios de Legendre:

$$\int_0^\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_0^\pi \frac{\rho_s(\theta)}{\epsilon_0} P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Obteniendo una expresión para A_l :

$$A_l = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{l-1}} \int_0^\pi \frac{\rho_s(\theta)}{\epsilon_0} P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Si sustituimos $\rho_s(\theta) = k \cos \theta = k P_1(\cos \theta)$:

$$A_l = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{l-1}} \int_0^\pi k P_1(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{k}{3\epsilon_0}$$

donde se ha aplicado la ortogonalidad de los polinomios de Legendre, resultando $l = 1$. Finalmente:

$$\begin{aligned} \phi_{int} &= \frac{k}{3\epsilon_0} r \cos \theta \\ \phi_{ext} &= \frac{kR^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos \theta \end{aligned}$$

Esfera conductora rodeada de una corteza esférica conectada a tierra

*Consideremos una esfera conductora a un potencial V_0 de radio a rodeada de una corteza esférica de radio b conectada a tierra. Determine el potencial en todo punto del espacio.*¹

En este problema el potencial no presenta dependencia alguna en θ con lo que la solución de la ecuación

¹Ver [9] para profundizar en este problema.

de Laplace se puede escribir de manera mucho más sencilla a la habitual:

$$\phi(r) = \left(A + \frac{B}{r} \right)$$

Nótese que para $r \leq a$ el potencial debe de ser V_0 al ser un conductor en equilibrio electrostático y para $r \geq b$ el potencial será cero (hay que tener en cuenta que dado que la corteza tiene el mismo potencial que el infinito, no hay línea de campo fuera de ésta). Entonces, analizando el caso para $a \leq r \leq b$ tenemos las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{cases} \phi(a) = V_0 \\ \phi(b) = 0 \end{cases}$$

Si se las imponemos a la ecuación del potencial:

$$\begin{cases} A + \frac{B}{a} = V_0 \\ A + \frac{B}{b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{aV_0}{b-a} \\ B = \frac{abV_0}{b-a} \end{cases}$$

Entonces el potencial viene dado por:

$$\phi = \frac{\phi_0 a}{b-a} \left(\frac{b}{r} - 1 \right)$$

y el campo se obtiene sin más que tener en cuenta que $\mathbf{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{E} = \frac{\phi_0 ab}{(b-a)r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Capítulo 5

Corrientes eléctricas estacionarias

En los capítulos anteriores hemos estudiado los campos derivados de cargas estáticas. Ahora nos proponemos estudiar los fenómenos más importantes que tienen lugar cuando las cargas se mueven de manera prácticamente uniforme, es decir, movimientos que en conjunto no sufren aceleraciones.

Las condiciones cambian ahora de manera que intervienen campos que no son conservativos al mismo tiempo que campos conservativos. Además para que se produzca corriente dentro de un conductor debe existir un campo dentro de él, lo que modifica las condiciones de conductores con cargas estáticas donde $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ en el interior. Este campo se transmite a lo largo de todo el conductor a la velocidad de propagación de toda perturbación electromagnética, velocidad de la luz. Por esta razón cuando un generador se aplica a una línea que transporta energía eléctrica, casi instantáneamente se ponen en movimiento tanto los electrones que están dentro del conductor en puntos próximos al generador como los que se encuentran a kilómetros de distancia. Esto contrasta con que el propio movimiento de los electrones, que en este caso es muy lento.

5.1. Corrientes y densidades volumétricas de corriente

El *flujo de carga eléctrica* recibe el nombre de **corriente eléctrica**. La **intensidad de corriente eléctrica** se define como la carga neta que atraviesa una superficie por unidad de tiempo, y su valor viene dado por la expresión:

$$I \equiv \frac{dq}{dt} \quad [\text{A}] \quad (5.1)$$

Si las cargas están en movimiento tendremos una distribución de corrientes cuya densidad podemos caracterizar como cociente entre la cantidad de carga por unidad de tiempo que atraviesa un elemento de área normal a la dirección en que se mueven y el valor de dicho elemento. Aparece así el concepto de **densidad volumétrica de corriente**, \mathbf{J} , definida como:

$$|\mathbf{J}| \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta s} = \frac{dI}{ds} \quad (5.2)$$

donde \mathbf{J} tiene la dirección del flujo de carga. Entonces la corriente que fluye por una superficie arbitraria s se puede calcular como:

$$I = \iint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (5.3)$$

Otra manera de definir la densidad de corriente es la que sigue. Si consideramos

$$J_a = \frac{dI}{dS_a} \quad (5.4)$$

siendo J_a la componente de \mathbf{J} en la dirección a , dS_a un elemento de superficie normal a esta dirección y dI es la corriente que atraviesa ese elemento de superficie. A partir de la definición anterior obtenemos que:

$$J = \frac{dI}{dS_0} \quad (5.5)$$

donde dS_0 es un elemento de superficie orientado de tal manera que el cociente dI/dS sea máximo.

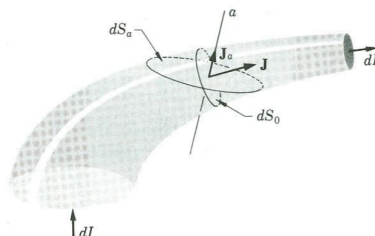


Figura 5.1: Definición alternativa de la densidad de corriente eléctrica

Una convención histórica marca que el sentido de movimiento las cargas ha de ser de las positivas a las negativas, lo que permite escribir

$$\mathbf{J} = J\hat{\mathbf{J}} \quad (5.6)$$

En conclusión **la dirección de la densidad volumétrica de corriente es la misma que la del flujo de carga** y su magnitud está dada por la corriente por unidad de área a través de una superficie perpendicular al flujo.

Pasemos a calcular la carga dq que atraviesa un superficie ds perpendicular a \mathbf{J} en un tiempo dt . Como $dq = Idt$:

$$dq = Jdsdt \quad (5.7)$$

Pero toda esta carga debe estar contenida en el cilindro de longitud dl y volumen dv , con lo que $dq = \rho_v dv = \rho_v dsdl$ y:

$$\rho_v dsdl = Jdsdt \Rightarrow \rho_v \frac{dl}{dt} = J \quad (5.8)$$

Si definimos $V \equiv \frac{dl}{dt}$ la velocidad promedio de las cargas, podemos escribir:

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{V} \quad (5.9)$$

dado que la dirección de \mathbf{J} es la misma que la del flujo de carga. Si las cargas en movimiento fueran de diversos tipos con densidades ρ_{vi} y velocidades respectivas \mathbf{v}_i , entonces la expresión anterior adoptaría la siguiente forma:

$$\mathbf{J} = \sum_i \rho_{vi} \mathbf{v}_i \quad (5.10)$$

De considerar una superficie arbitraria, no tendríamos más que sumar las contribuciones de todos los elementos ds :

$$\left(\frac{dq}{dt} \right)_{\text{a través de } S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (5.11)$$

Análogamente se puede definir una **densidad superficial de corriente** \mathbf{k} con dirección igual al flujo de cargas y magnitud la corriente por unidad de longitud a través de una línea que descansa sobre la superficie y está colocada perpendicularmente al flujo. Tal y como era de esperar:

$$\mathbf{k} = \rho_S \mathbf{v}; \quad \left(\frac{dq}{dt} \right)_{\text{a través } dl} = |\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{t}}| \cdot dl \quad (5.12)$$

Y para una corriente filamental:

$$I = \rho_l |\mathbf{v}| \tag{5.13}$$

Por otro lado se define un **elemento de corriente** para una corriente filamental como $I dl$. Esto se puede generalizar a corrientes distribuidas en volúmenes o superficies. Supongamos por ejemplo un conductor como el de la figura 5.2 (b) con dS pequeña en comparación con la longitud del filamento. Al ser el flujo de corriente normal a la superficie considerada se observa que $I = JdS$ entonces $I dl = JdSdl = JdV$. De manera similar, para el caso de una corriente superficial se obtiene que: $I dl = KdS$.

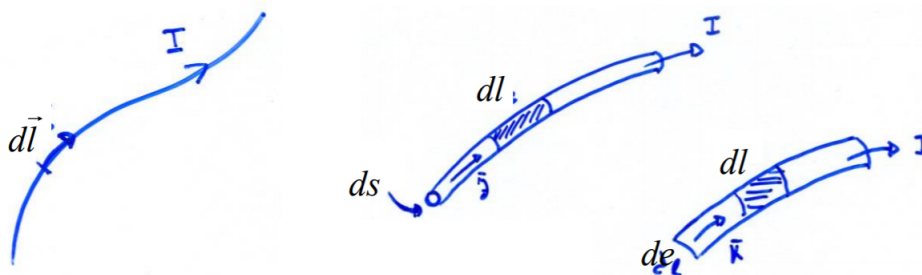


Figura 5.2: Elementos de corriente

5.2. Ecuación de continuidad

En ninguno de los experimentos realizados hasta nuestros días se ha creado o aniquilado carga, por tanto el **principio de conservación de la carga** establece que ésta no se crea ni destruye. Como consecuencia de este principio podemos obtener una relación entre el flujo de carga sobre una superficie cerrada S que limita un volumen V y la variación de la carga en su interior. Aplicando dicho principio de conservación se deduce que el flujo de corriente será igual a la disminución de carga Q en el interior, en forma matemática dicho principio se expresa de la forma siguiente:

$$\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho_v dv \right) = -\iiint_V \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv \tag{5.14}$$

Donde se supone que s y v son independientes de t . La ecuación

$$\boxed{\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\iiint_V \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv} \tag{5.15}$$

es la **ecuación de continuidad en forma integral**. Tratemos ahora de obtener la forma diferencial de dicha ecuación. Si aplicamos el Teorema de la Divergencia al primer miembro de la ecuación:

$$\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J} dv \tag{5.16}$$

entonces:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J} dv = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \tag{5.17}$$

Finalmente:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \tag{5.18}$$

esta ecuación es la forma diferencial de la ecuación de continuidad, que expresa la relación entre la divergencia de la densidad de corriente \mathbf{J} y la variación temporal de la densidad de carga en un punto del espacio. También podemos expresar en forma diferencial la ecuación de continuidad para corriente continua, ya que simplemente se obtiene teniendo en cuenta que en ningún punto se produce acumulación

o eliminación de carga, es decir, $(\partial\rho/\partial t) = 0$, por tanto:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = 0} \quad (5.19)$$

Esta ecuación expresa que en ningún punto, dentro de un tubo de corriente continua, se genera carga, y que no hay flujo de corriente a través de las paredes del tubo, es decir, toda la corriente que entra por una sección transversal del tubo sale por otra situada en otro punto.

Podemos combinar la ecuación de continuidad con las condiciones de frontera:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial\rho_s}{\partial t} \quad (5.20)$$

En caso de que las corrientes sean estacionarias (a saber, $\frac{\partial\rho_v}{\partial t} = \frac{\partial\rho_s}{\partial t} = 0$):

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = J_{2n} - J_{1n} = 0 \quad (5.21)$$

Durante el proceso de polarización de un material dieléctrico las cargas ligadas pueden moverse, por lo que es posible definir una **densidad de corriente confinada ó ligada** \mathbf{J}_{pv} . El proceso de polarización implica únicamente la separación de cargas ligadas, con lo cual estas deben de conservarse (esto es, debe verificarse la ecuación de continuidad para estas cargas):

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{pv} + \frac{\partial\rho_{pv}}{\partial t} = 0 \quad (5.22)$$

Y si recordamos que $\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$:

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J}_{pv} - \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.23)$$

A esta corriente se la denomina densidad de corriente de polarización, ya que es una consecuencia del proceso de polarización.

Ahora bien, dado que es sobre las cargas libres y por lo tanto sobre las corrientes libres, sobre las que se tiene cierto control, estas son las que tienen mayor interés. Las corrientes libres se clasifican en:

- **Corrientes de conducción:** caracterizada por el arrastre de cargas dentro de un medio eléctricamente neutro. Los ejemplos más conocidos son: El movimiento de los electrones en el seno de un metal, que desde este punto de vista está compuesto por átomos cuyas capas exteriores liberan los electrones y átomos ionizados en posiciones fijas que forman la red metálica. El movimiento de los iones en un líquido formado por iones positivos y negativos, los positivos se mueven en una dirección y los negativos en la contraria, de manera que ambos producen una corriente en el mismo sentido. Los electrones y huecos en un semiconductor, que producen una corriente similar a la anterior en la que los huecos actúan como cargas positivas.
- **Corriente de convección:** se produce cuando hay un transporte de masa que arrastra en su movimiento partículas cargadas; ejemplos característicos son la corriente producida por el movimiento de un líquido que lleva en su interior iones; o el haz de electrones en un tubo de rayos catódicos, o el movimiento del gas de iones en un acelerador de partículas.

Ejemplo: Flujo a través de una superficie cerrada

Indique en cuál de los cuatro casos siguientes, la superficie S delimitada por la línea discontinua encierra una carga que está aumentando. Las flechas representan el sentido de la densidad de corriente. Fuente: [13]

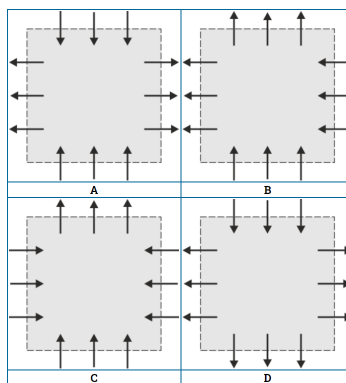


Figura 5.3: La superficie S delimitada por la línea discontinua encierra una carga que está aumentando. Las flechas representan el sentido de la densidad de corriente.

La respuesta correcta es la C. La ley de conservación de la carga establece que

$$\frac{dQ_{int}}{dt} = - \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

es decir, lo que aumenta la carga contenida en un volumen es igual a lo que fluye hacia el interior por la frontera de éste.

Examinando las cuatro figuras, vemos que en la figura C hay mayoría de líneas de corriente hacia el interior (3 caras a 1), cosa que no ocurre en el resto. Por tanto, es en ese caso en el que está aumentando la carga.

5.3. Corrientes de conducción

Cuando existen cargas en movimiento dentro de un conductor, no tenemos una situación estática, $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$ en el mismo. Por lo tanto, en este caso el conductor **no es un volumen equipotencial**. Para mantener una corriente constante, es necesario mantener una diferencia de potencial constante y esto implica un suministro de energía continuo al sistema desde una fuente externa, situada en algún lugar del circuito cerrado. Si se realiza un trabajo total W_q sobre una carga q al transitar ésta por una trayectoria cerrada:

$$\varepsilon = \frac{W_q}{q} = \frac{1}{q} \oint_c \mathbf{F}_q \cdot d\mathbf{l} = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.24)$$

donde ε es la conocida como **fuerza electromotriz**. Por lo tanto debe existir una **fuerza o fuentes de campo eléctrico no conservativo** (baterías) \mathbf{E}_{nc} . Esta fuente de fuerza electromotriz es una fuente localizada que produce un campo \mathbf{E}_{nc} únicamente cuando la trayectoria de la carga pasa por la batería y $\mathbf{E}_{nc} = \mathbf{0}$ en todos los demás puntos del circuito. Entonces:

$$\varepsilon_{fuente} = \int_{fuente} \mathbf{E}_{nc} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.25)$$

La corriente eléctrica es un movimiento de electrones desde el *polo negativo* al *polo positivo*. Para que la corriente perdure es necesario suministrar electrones al polo negativo y retirarlos del positivo. Ésta es la función de los generadores. Nuestro estudio se restringirá a aquellas regiones conductoras en las que no existan campos eléctricos no conservativos ($\mathbf{E}_{nc} = \mathbf{0}$), es decir fuera de la región donde están ubicadas las baterías.

5.4. Relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico. Ley de Ohm

Claramente el campo electrostático \mathbf{E} ejercerá fuerzas sobre las cargas en movimiento, con lo que debe existir una relación funcional entre \mathbf{J} y \mathbf{E} es decir debe poder escribirse algo como:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}) \quad (5.26)$$

Se tomará como condición adicional $\mathbf{J}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (lo que excluye los superconductores). La relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico puede ser complicada, dependiendo del material considerado (análogamente a la relación entre \mathbf{P} y \mathbf{E} en el Capítulo 2). Consideremos un conductor **isotrópico lineal**, para el cual la relación es la siguiente:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (5.27)$$

donde σ es la **conductividad del conductor**. Para corrientes estacionarias en conductores que cumplan estas características tenemos que:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\sigma \mathbf{E}_2 - \sigma \mathbf{E}_1) = 0 \quad (5.28)$$

Como $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ las líneas de \mathbf{E} sufren una refracción al cruzar la superficie limitante entre el conductor y otro medio de diferente conductividad.

En caso de que el conductor sea, además, **homogéneo**, la conductividad será constante y pasará a ser una característica del material. La relación $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ para un medio lineal homogéneo e isotrópico es equivalente a la relación empírica macroscópica que se conoce como ley de Ohm. Procedamos a demostrarlo. Considérese la situación de la figura 5.5 Bajo estas hipótesis \mathbf{J} y \mathbf{E} son paralelos, y existirá un campo \mathbf{E} tangencial a la superficie del conductor dado por $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma$ (aplicando las condiciones de frontera del campo electrostático). Si $|\Delta\phi|$ es la magnitud de la diferencia de potencial entre sus extremos entonces:

$$|\mathbf{E}| = \frac{|\Delta\phi|}{l}$$

$$|\mathbf{J}| = \frac{I}{S}$$

Donde hemos supuesto que la corriente está distribuida uniformemente sobre toda la sección. Operando:

$$|\mathbf{J}| = \sigma \cdot |\mathbf{E}| \Rightarrow \frac{I}{S} = \sigma \frac{|\Delta\phi|}{l} \quad (5.29)$$

Definiendo la **resistencia** del conductor como:

$$R \equiv \rho \frac{l}{S} \quad [\Omega] \quad (5.30)$$

donde $\rho \equiv \sigma^{-1}$ es la **resistividad** del conductor, entonces:

$$\boxed{|\Delta\phi| = IR} \quad (5.31)$$

expresión que se conoce como **Ley de Ohm**.

5.5. Relación entre la resistencia y la capacidad

Supónganse dos conductores de la misma forma. Existen dos maneras en las que se les puede utilizar

Material	σ (S/m)	ρ ($\Omega \cdot m$)
Plata	6.29×10^7	1.59×10^{-8}
Cobre	5.96×10^7	1.72×10^{-8}
Oro	4.46×10^7	2.24×10^{-8}
Hierro	1.04×10^7	9.61×10^{-8}
Agua de mar	$\simeq 4$	$\simeq 0.2$
Agua destilada	$\simeq 10^{-4}$	$\simeq 10^4$
Goma	$10^{-15} - 10^{-13}$	$10^{13} - 10^{15}$

Figura 5.4: Resistividad y conductividad de algunos materiales. Fuente: [12]

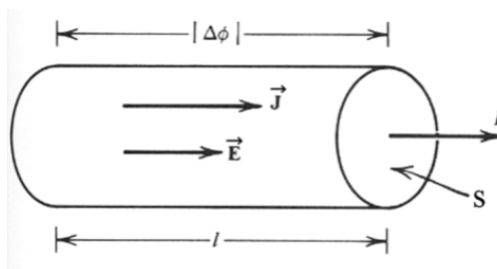


Figura 5.5

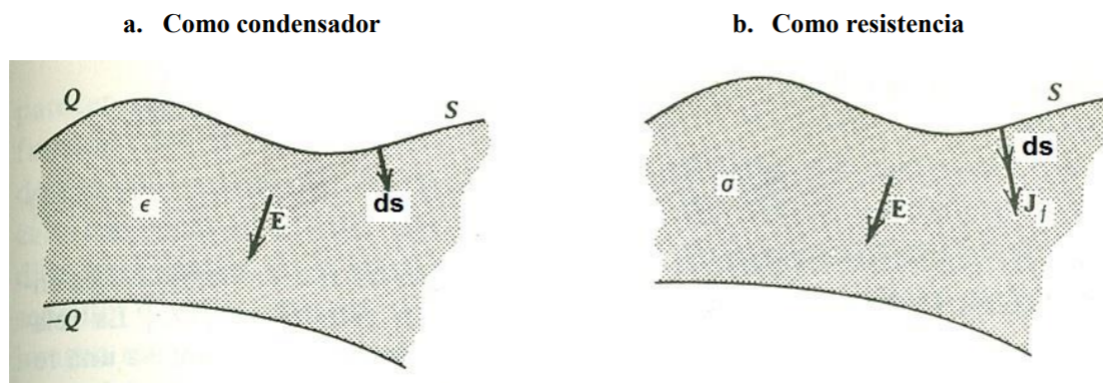


Figura 5.6

- **Como un condensador.** Si se llena la región entre los dos conductores con un dieléctrico l.h.i de permeabilidad absoluta ϵ y se colocan cargas iguales y opuestas es ellos:

$$\Delta\phi = \int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{5.32}$$

La carga sobre la placa positiva será:

$$q = \int_S \rho_s ds = \int_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{5.33}$$

Con lo que la capacidad será:

$$C = \frac{q}{\int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} = \frac{\epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{\int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \tag{5.34}$$

- **Como una resistencia.** i se llena la región entre los dos conductores con un conductor l.h.i de

conductividad σ y se colocan cargas iguales y opuestas es ellos:

$$\Delta\phi = \int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.35)$$

al igual que en el caso anterior. La corriente total que pasa entre las placas es:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \sigma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (5.36)$$

Teniendo en cuenta la Ley de Ohm:

$$R = \frac{\int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\sigma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}} \quad (5.37)$$

Ahora, si comparamos ambos resultados obtenemos la siguiente relación:

$$\boxed{RC = \frac{\varepsilon}{\sigma}} \quad (5.38)$$

Este resultado puede ser usado como método de medición de C indirecta, puesto que llevar a cabo medidas de resistencia es más fácil (gracias a un amperímetro y un voltímetro) que la medición directa (electrostática) de la capacidad.

5.6. Relaciones energéticas: Ecuación del circuito

Toda la energía que entra al sistema, para mantener una corriente constante, como energía eléctrica debe de ser convertida en calor en el volumen del conductor. **En una situación estacionaria, no puede haber acumulación de energía eléctrica.** Por tanto, todo lo que entra al sistema como energía eléctrica debe ser convertido a otra forma de energía, observándose que la energía eléctrica consumida se manifiesta en forma de calor en el cuerpo del conductor.

Calculemos el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga Δq :

$$\Delta W = -\Delta q \Delta\phi \Rightarrow \frac{\Delta W}{\Delta t} = -\Delta\phi \frac{\Delta q}{\Delta t} = -I \Delta\phi \quad (5.39)$$

Entonces la **potencia disipada por unidad de volumen** será

$$w = \frac{\Delta W / \Delta t}{s \cdot l} = \left(\frac{I}{s}\right) \cdot \left(\frac{-\Delta\phi}{l}\right) = JE \quad (5.40)$$

Al considerar un conductor l.h.i la densidad de corriente y el campo electrostático son paralelos:

$$w = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma} \quad (5.41)$$

Podemos calcular la energía disipada por el paso de la corriente en la unidad de tiempo. Considerando la corriente distribuida uniformemente sobre la superficie s:

$$J = \frac{I}{s} \quad (5.42)$$

Empleando (5.41):

$$P = \iiint_v \frac{J^2}{\sigma} dv = \int_l \frac{I^2}{s^2} \frac{1}{\sigma} s dl = I^2 \cdot \frac{l}{\sigma s} \equiv_{\text{Ley de Ohm}} I^2 R \quad (5.43)$$

Entonces la energía disipada por el paso de la corriente en la unidad de tiempo será:

$$P = I^2 R = \frac{(\Delta\phi)^2}{R} \quad [W] \quad (5.44)$$

La fuerza electromotriz es el trabajo que debe realizar el generador para mantener el movimiento de la unidad de carga

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq} = \oint_c \mathbf{E}_{nc} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.45)$$

Si además de la resistencia total del circuito R , el generador tuviese una resistencia interna r , la potencia total consumida sería:

$$= P = P_1 + P_2 = I^2(R + r) = P = \frac{dW}{dq} \frac{dq}{dt} = \varepsilon I \quad (5.46)$$

Entonces:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \quad (5.47)$$

5.7. Equilibrio electrostático

Cuando estudiamos las cargas en conductores en condiciones estáticas suponemos que se sitúan instantáneamente en las zonas de la superficie, de manera que el campo en el interior debido a las cargas en la superficie y los campos externos sea nulo. En este apartado vamos a estudiar como se produce la redistribución de cargas en un conductor lineal homogéneo e isótropo. Suponemos que en un instante dado dentro de un volumen V de un conductor, cuya conductividad sea σ y la permitividad ε , existe una densidad de carga ρ_v . El flujo de corriente que atraviesa la superficie que limita el volumen V está relacionado con la carga en su interior a través de la ecuación de continuidad, que para cada punto hemos visto que es:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.48)$$

Empleando la relación $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$:

$$\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.49)$$

empleando que σ es constante. Además, por esto mismo se tendrá que:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (5.50)$$

Introduciendo esto en la ecuación (5.49):

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.51)$$

Sin más que integrar:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} dt \Rightarrow \ln \rho = -\frac{\sigma}{\varepsilon} t + K \quad (5.52)$$

Entonces:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} \quad (5.53)$$

Esta ecuación muestra como varía la densidad de carga con el tiempo. Vemos que decae hasta anularse en el interior para desplazarse hacia la superficie del conductor u otra posición de equilibrio.

El tiempo que tarda en alcanzarse el equilibrio teóricamente es infinito, pero se toma como referencia de la rapidez con que se produce el proceso la relación entre la densidad inicial y la que existe en el instante

para el que $(\sigma t/\varepsilon) = 1$. Dicha relación es:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{-1} \simeq 0,368 \quad (5.54)$$

Que se cumple cuando:

$$t = \tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (5.55)$$

Al tiempo τ se le denomina **tiempo de relajación** y es el tiempo que tarda en reducirse la densidad de carga a un 36,8% de su valor inicial. En los buenos conductores este tiempo es muy corto, del orden de nanosegundos, por lo que se alcanza muy rápidamente el equilibrio electrostático. También podemos concluir que si en un instante dado la densidad de carga $\rho = 0$, dicha densidad no puede ser distinta de cero en instantes posteriores en ese mismo punto, ya que ρ decrece con el tiempo.

En conductores homogéneos e isótropos la carga se dispersa hasta la superficie. Si se da la circunstancia de que hay dos medios distintos, puede producirse acumulación de cargas en la superficie de separación entre ambos.

Ejemplo: Descarga de un condensador con un medio polarizado

El sistema de la figura está formado por tres placas conductoras ideales, planas y paralelas, todas de área S . Todas las placas pueden suponerse muy delgadas. Entre la placa 1 y la 2 hay un dieléctrico ideal de espesor a , caracterizado porque presenta una polarización uniforme y constante \mathbf{P}_0 , perpendicular a dichas placas. Entre las placas 2 y 3, separadas una distancia b , hay un medio óhmico (i.e. verifica en todos sus puntos la Ley de Ohm) de conductividad σ y permitividad ε . Las dos regiones entre las placas están inicialmente descargadas. La placa central se encuentra conectada a un generador, que fija una diferencia de potencial V_0 respecto a las otras dos placas, ambas a tierra.¹

1. Determine los campos y corrientes en el sistema cuando éste se halla en régimen estacionario.
2. Calcule las distribuciones estacionarias de carga libre en el sistema. Ajuste el valor de V_0 para que la placa central esté descargada. Este valor se usará en los dos apartados siguientes.
3. En un instante $t = 0$ se desconecta el generador. Halle la distribución de campos, corrientes y cargas libres en el sistema cuando se alcanza de nuevo una situación estacionaria.
4. Calcule la evolución en el tiempo de los campos, las corrientes y la carga libre en las placas.

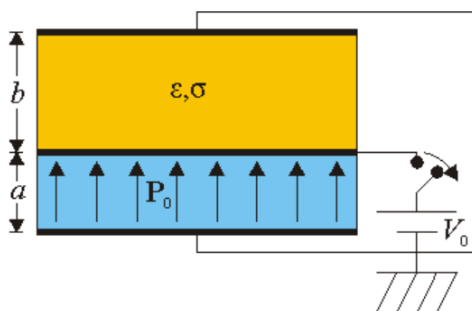


Figura 5.7

1. Consideremos el estado estacionario antes de la desconexión. Como es habitual podemos considerar dos problemas claramente diferenciados dentro del problema, pues la placa central es un conductor a potencial fijado y por tanto separa completamente los problemas a un lado y al otro de ella. Así, en lugar de un problema complicado tenemos dos problemas sencillos. El eje z será perpendicular

¹Este y otros problemas resueltos se pueden consultar en [14]

a las placas, siendo el plano XY la placa inferior.

Región $0 < z < a$: Dieléctrico ideal con polarización uniforme $\mathbf{P}_1 = P_0 \mathbf{u}_z$ situada entre conductores a potencial 0 y V_0 , respectivamente.

Si despreciamos los efectos de borde, y teniendo en cuenta que el dieléctrico es homogéneo podemos escribir $\mathbf{E}_1 = E_1 \mathbf{u}_z$. E_1 se obtiene de manera sencilla a través de la diferencia de potencial entre las placas:

$$0 - V_0 = \int_0^a E \, dz = E_1 a \Rightarrow \mathbf{E}_1 = -\frac{V_0}{a} \mathbf{u}_z$$

El desplazamiento eléctrico se obtiene por medio de las expresiones de \mathbf{E} y \mathbf{P} :

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 + \mathbf{P}_1 = \left(-\frac{\varepsilon_0 V_0}{a} + P_0 \right) \mathbf{u}_z$$

En esta región $\mathbf{J}_1 = \mathbf{0}$ pues al ser un dieléctrico ideal no permite el paso de corriente.

Región $a < z < a + b$: Medio óhmico entre dos placas a distinto potencial.

El procedimiento para obtener el campo eléctrico es análogo al caso anterior:

$$V_0 - 0 = \int_a^{a+b} E \, dz = E_2 b \Rightarrow \mathbf{E}_2 = \frac{V_0}{b} \mathbf{u}_z$$

Obsérvese que en esta región el campo va en sentido opuesto al de la otra zona. En ambos casos el campo va desde la placa de mayor potencial (la intermedia) a las de los extremos. Para obtener la densidad de corriente aplicamos la Ley de Ohm, y para el desplazamiento eléctrico, la ecuación constitutiva

$$\mathbf{J}_2 = \sigma \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma V_0}{b} \mathbf{u}_z \quad \mathbf{D}_2 = \varepsilon \mathbf{E}_2 = \frac{\varepsilon V_0}{b} \mathbf{u}_z$$

La corriente que circula entre la placa central y la superior es el flujo de la densidad volumétrica \mathbf{J}_2 a través de una superficie paralela a las placas:

$$I_2 = \int_S \mathbf{J}_2 \cdot d\mathbf{S} = J_2 S = \frac{\sigma V_0 S}{b}$$

2. Se nos pide ahora obtener las densidades de carga libre. Antes de nada habrá que razonar que tipo de densidades de carga hay presentes. Apreciamos que al ser uniformes los campos en cada una de las regiones, la densidad volumétrica de carga libre es nula:

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

Lo que sí hay son densidades de carga libre sobre las placas conductoras (densidad superficial de carga libre). En todas ellas, por ser muy delgadas, podemos calcular la densidad superficial a partir del salto en \mathbf{D} , sin necesidad de distinguir entre una y otra cara de la placa (como es habitual).

Densidad de carga superficial en $z = 0$: Para la placa en $z = 0$, el vector desplazamiento en la parte superior es \mathbf{D}_1 , mientras que en la parte inferior es nulo, ya que en el exterior de un condensador ideal no hay campo eléctrico. Por tanto, aplicandolos las condiciones de frontera vistas en el Capítulo 2:

$$\rho_s(0) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \mathbf{u}_z \cdot \left(\left(-\frac{\varepsilon_0 V_0}{a} + P_0 \right) \mathbf{u}_z - \mathbf{0} \right) = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{a} + P_0 \quad (5.56)$$

La carga total de dicha placa será, sin más que integrar:

$$Q(0) = \int_S \rho_s \, dS = -\frac{\varepsilon_0 S V_0}{a} + P_0 S \quad (5.57)$$

Densidad de carga superficial en $z = a$ (Placa central): Por el mismo procedimiento:

$$\rho_s(a) = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1] = \mathbf{u}_z \cdot \left(\frac{\varepsilon V_0}{b} \mathbf{u}_z - \left(-\frac{\varepsilon_0 V_0}{a} + P_0 \right) \mathbf{u}_z \right) = \frac{\varepsilon a + \varepsilon_0 b}{ab} V_0 - P_0$$

Y:

$$Q(a) = \int_S \rho_s \, dS = \frac{(\varepsilon a + \varepsilon_0 b) S}{ab} V_0 - P_0 S$$

Densidad de carga superficial en $z = a + b$ (Placa superior): Siguiendo el mismo método

$$\rho_s(a + b) = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{0} - \mathbf{D}_2] = \mathbf{u}_z \cdot \left(\mathbf{0} - \frac{\varepsilon V_0}{b} \mathbf{u}_z \right) = -\frac{\varepsilon V_0}{b}$$

y la carga libre total de esta placa es:

$$Q(a + b) = \int_S \rho_s \, dS = -\frac{\varepsilon S V_0}{b}$$

Condición para el potencial: Buscamos V_0 tal que

$$Q(a) = \int_S \rho_s \, dS = \frac{(\varepsilon a + \varepsilon_0 b) S}{ab} V_0 - P_0 S = 0$$

Despejando:

$$V_0 = \frac{P_0 ab}{\varepsilon a + \varepsilon_0 b}$$

3. Una vez que se desconecta el generador, el potencial de la placa central deja de estar fijado. El sistema evoluciona hasta alcanzar un nuevo estado estacionario. Lo que caracteriza a este estado estacionario no es, de entrada, que la placa central esté descargada, o que su potencial sea nulo, sino que el sistema no depende del tiempo.

Campo en el medio óhmico: Si aplicamos la ley de conservación de la carga a la placa central tenemos que:

$$0 = -\frac{dQ}{dt} = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.58)$$

Donde se ha impuesto que la derivada temporal de Q sea 0 porque en el estado estacionario las cargas no fluyen de una zona a otra. Esta integral se compone, en principio, de dos partes: una, que da la corriente a lo largo del cable conectado a la placa, pero ésta es nula por estar el generador desconectado; la otra corresponde a la corriente a través del medio óhmico. Por tanto:

$$0 = \int \mathbf{J}_2 \cdot d\mathbf{S} = J_2 S \Rightarrow \mathbf{J}_2 = \mathbf{0}$$

y si no hay corriente, tampoco hay campo (por ser un medio óhmico):

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{J}_2}{\sigma} = \mathbf{0}$$

Si el campo eléctrico en el medio óhmico es nulo, también lo será el vector desplazamiento en dicho medio.

Potencial de la placa central: Emplearemos que la placa superior está a tierra:

$$V(a) - V(a + b) = \int_a^{a+b} E_2 \, dz = 0 \Rightarrow V(a) = V(a + b) = 0$$

Entonces la placa central también está a tierra.

Campo en el medio polarizado: El campo eléctrico es nulo pues:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{V(0) - V(a)}{a} \mathbf{u}_z = \mathbf{0}$$

Pero el desplazamiento eléctrico no será nulo, sino que:

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 + \mathbf{P}_1 = P_0 \mathbf{u}_z$$

Carga en las placas: Dado que hay una discontinuidad en el desplazamiento eléctrico entre las dos regiones, sabemos que deber haber una densidad de carga en la placa central:

$$\rho_s(a) = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{0} - \mathbf{D}_1] = \mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{0} - P_0 \mathbf{u}_z) = -P_0$$

Entonces

$$Q(a) = \int_S \rho_s \, dS = -P_0 S$$

Existirá una carga de signo opuesto en la placa inferior:

$$\rho_s(0) = P_0 \quad Q(0) = P_0 S$$

Pero en la placa superior, en cambio, la carga es nula, por ser nulo el campo a ambos lados

$$\rho_s(a+b) = 0 \quad Q(a+b) = 0$$

4. Pasemos ahora a estudiar como evoluciona el sistema desde que se desconecta el interruptor. Para estudiar la evolución del sistema, supondremos que en cada instante la placa central posee un cierto valor $V(t)$ que hemos de determinar. Su valor inicial será el calculado en el segundo apartado:

$$V_0 = \frac{P_0 ab}{\varepsilon a + \varepsilon_0 b}$$

Recordemos también que obtuvimos que para la placa central

$$Q(a) = \frac{(\varepsilon a + \varepsilon_0 b) S}{ab} V_0 - P_0 S$$

lo que podemos escribir para un instante dado t como:

$$Q(a) = \frac{(\varepsilon a + \varepsilon_0 b) S}{ab} V(t) - P_0 S$$

Aplicando el mismo razonamiento para determinar $I_2(t)$:

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = J_2 S = \frac{\sigma S}{b} V(t)$$

Aplicando ahora la ley de conservación de la carga a una superficie que envuelve a la placa central resulta:

$$-\frac{dQ}{dt} = -\frac{(\varepsilon a + \varepsilon_0 b) S}{ab} \frac{dV}{dt} = \frac{\sigma S}{b} V(t)$$

lo que podemos escribir como:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V(t)}{\xi} \quad \xi = \frac{(\varepsilon a + \varepsilon_0 b)}{a\sigma}$$

Ecuación Diferencial Ordinaria de primer orden fácilmente resoluble:

$$V(t) = V_0 e^{-t/\tau} = \frac{P_0 a b e^{-t/\xi}}{\varepsilon a + \varepsilon_0 b}$$

Lo único que tendremos que hacer ahora es tomar las expresiones de los campos del apartado 1 y cambiar V_0 por esta expresión de $V(t)$. En particular se aprecia que la placa central con el tiempo se carga:

$$Q(a) = \frac{(\varepsilon a + \varepsilon_0 b) S}{ab} V(t) - P_0 S = -P_0 S (1 - e^{-t/\xi})$$

La razón es que las cargas de polarización asociadas a P_0 atraen a cargas libres que se depositan en la placa.

5.8. Leyes de Kirchhoff

- **Primera Ley de Kirchhoff** o **Ley de los nudos**: *En un nudo la suma algebraica de las corrientes que entran y salen es nula.*

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0 \tag{5.59}$$

La primera ley de Kirchhoff es una forma de expresar el principio de conservación de la carga. Su demostración se fundamenta en la ecuación de continuidad para corrientes estacionarias:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0 = \sum_i \int_{s_i} \mathbf{J}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i I_i \tag{5.60}$$

donde s es una superficie cerrada que envuelve un nudo.

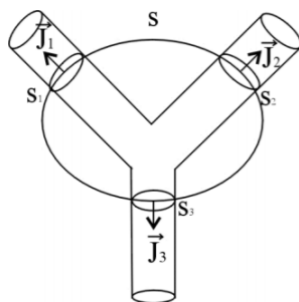


Figura 5.8

- **Segunda Ley de Kirchhoff** o **Ley de las mallas**: *La suma algebraica de las fuerzas electromotrices en un circuito cerrado es igual a la suma de las caídas de potencial $R_i I$ en cada elemento del circuito.*

$$\sum_{k=1}^M \mathcal{E}_k = \sum_{i=1}^N R_i I \tag{5.61}$$

la segunda ley de Kirchhoff corresponde al principio de conservación de la energía, ya que la energía suministrada por unidad de tiempo en los generadores es igual a la disipada en el mismo tiempo en las resistencias del circuito.

Esta ley se deduce de la ecuación del circuito:

$$\varepsilon = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{generador}} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{nc}) \cdot d\mathbf{l} + \int_{\text{conductor}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Ir + IR \tag{5.62}$$

donde r es la resistencia interna de la batería y R la resistencia total del circuito.

Bibliografía

- [1] Griffiths, D. (2014). *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press
- [2] Wangsness, R. (1983). *Campos electromagnéticos*. México D.F.: Limusina, S.A.
- [3] Jefimenko, Oleg D. (1989). *Electricity and Magnetism - An Introduction to the Theory of Electric and Magnetic Fields*.
- [4] López, V. *Electromagnetismo I*. Publicaciones UNED.
- [5] Feynman, R., Leighton R., Sands M. (1964). *The Feynman lectures on physics*. New York: Basic Books.
- [6] Apuntes de Electromagnetismo I del profesor Francisco José Ares del Grado en Física (USC).
- [7] Trabajo *El Teorema de Earnshaw* (Curso 2020-2021). Roque Márquez Rodríguez (GE1) y Brais Becerra Lameiro (GE2).
- [8] Trabajo *El dipolo eléctrico* (Curso 2020-2021). Alberte Xosé López Freire (GE1) y Antón Carcedo Martínez (GE2)
- [9] Trabajo *Problema voluntario de Electromagnetismo* (Curso 2020-2021). Fabio Lebosó Francisco (GE2)
- [10] [Wiki del Departamento de Física Aplicada III de la US](#)
- [11] [Apuntes del método de las imágenes de la US](#)
- [12] [Apuntes Ley de Ohm. Departamento de Física Aplicada II de la US.](#)
- [13] [Preguntas de test de corriente eléctrica \(GIE\). Departamento de Física Aplicada II de la US.](#)
- [14] [Problemas de corriente eléctrica. Departamento de Física Aplicada II de la US.](#)